

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

Mestrado em: Ciências Actuarias

AVALIAÇÃO DE OPÇÕES E GARANTIAS
EMBUTIDAS EM SEGUROS LIGADOS A
FUNDOS DE INVESTIMENTO

Sofia Gandiaga Frederico

Orientação: Professor Doutor Onofre Alves Simões

Júri:

Presidente: Professora Doutora Maria de Lourdes Caraças Centeno

Vogais: Professor Doutor Onofre Alves Simões

Professor Doutor João Miguel Espiguiha Guerra

Novembro de 2011

Avaliação de Opções e Garantias Embutidas em Seguros Ligados a Fundos de Investimento

Sofia Gandiaga Frederico

Mestrado em: Ciências Actuarias

Orientador: Professor Doutor Onofre Alves Simões

Provas concluídas em: Novembro de 2011

Resumo

A avaliação de opções contratuais e garantias financeiras encontra-se no centro das atenções do sector segurador e tem despertado um forte interesse académico nos anos recentes. Tal decorre, por um lado, das tendências evolutivas ao nível dos seguros comercializados no ramo Vida, com características cada vez mais complexas e ligadas a uma vertente financeira e, por outro, do desenvolvimento de importantes projectos internacionais, tal como o Solvência II.

Em linhas gerais, o presente trabalho visa estudar a aplicação da teoria das opções financeiras à avaliação de contratos de seguros ligados a fundos de investimento com determinadas opções contratuais e garantias financeiras, tendo por base o princípio de avaliação *market-consistent*.

Para alcançar esse objectivo, uma parte importante da análise centra-se no processo de calibragem de modelos estocásticos para certos riscos de mercado, designadamente o risco de taxa de juro e o risco accionista, de forma o mais consistente possível com a informação disponível nos mercados financeiros, com o propósito de gerar cenários económicos futuros num ambiente neutro face ao risco. Posteriormente, o valor de certas garantias financeiras e da opção de resgate total de um contrato é determinado através da aplicação de metodologias baseadas na simulação de Monte Carlo.

Palavras-chave: Opções Contratuais, Garantias Financeiras, Seguros Ligados a Fundos de Investimento, *Market-Consistent*, Avaliação Neutra face ao Risco, Simulação de Monte Carlo.

Valuation of Options and Guarantees Embedded in Unit-linked Insurance Contracts

Sofia Gandiaga Frederico

Master in: Ciências Actuariais (Actuarial Science)

Advisor: Professor Doutor Onofre Alves Simões

Approved in: November, 2011

Abstract

The valuation of contractual options and financial guarantees is at the center of attention of the insurance sector and has drawn a strong academic interest in recent years. This is due, on one hand, to the evolutionary trends in Life insurance products, with features that are increasingly complex and connected to the financial market and, on the other hand, to the development of important international projects, such as Solvency II.

In general, this paper aims to study the application of financial options theory to the valuation of unit-linked contracts with some contractual options and financial guarantees. The study is based on the principle of market-consistent valuation.

To achieve this purpose, an important part of the analysis focuses on the calibration process of stochastic models for certain market risks, namely the interest rate risk and the equity risk, in a way as consistent as possible with the information available in the financial markets, with the aim of generating future economic scenarios in a risk-neutral world. Afterwards, the value of some financial guarantees and of the surrender option is determined by means of methodologies based on the Monte Carlo simulation method.

Keywords: Contractual Options, Financial Guarantees, Unit-linked, Market-Consistent, Risk-Neutral Valuation, Monte Carlo Simulation.

Índice

1. Introdução.....	10
2. Revisão de Literatura.....	16
3. Princípios e metodologias de avaliação de opções e garantias.....	20
3.1. Cálculo das provisões técnicas num ambiente Solvência II	20
3.2. Modelo de avaliação de algumas opções e garantias embutidas nas anuidades variáveis.....	24
3.2.1. Garantia de um benefício mínimo à data de termo do contrato	26
3.2.2. Garantia de um benefício mínimo em caso de morte	28
3.2.3. Opção de resgate.....	29
4. Geração de cenários económicos.....	37
4.1. Modelo Gaussiano de dois factores (G2++)	39
4.1.1. Conceitos gerais.....	39
4.1.2. Especificação do modelo G2++.....	41
4.1.3. Calibragem do modelo G2++	47
4.2. Modelo Heston-G2++	51
4.2.1. Apresentação do modelo	51
4.2.2. Avaliação de opções financeiras com base na transformada rápida de Fourier	56
4.2.3. Esquemas de simulação	60
5. Aplicação.....	67
5.1. Resultados da calibragem dos modelos financeiros	67
5.1.1. Modelo G2++	69
5.1.2. Modelo Heston-G2++.....	76
5.2. Caracterização dos fundos de investimento.....	83
5.3. Caracterização dos contratos de seguro e apresentação dos resultados.....	86

6. Conclusão	94
Bibliografia.....	99
Anexo A - Dados utilizados na calibragem dos modelos financeiros	105
Anexo B – Resultados da calibragem dos modelos financeiros	110
Anexo C – Simulação da evolução dos fundos de investimento	112
Anexo D – Simulação da evolução do índice obrigacionista	115
Anexo E – Resultados das análises de sensibilidade	118
Anexo F - Código dos programas.....	121

Índice de Quadros

Quadro 1: Parâmetros do modelo G2++	73
Quadro 2: Parâmetros do modelo Heston-G2++	81
Quadro 3: Parâmetros do modelo de Heston	82
Quadro 4: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$, $g_A = 3\%$, $g_D = 0\%$, $g_S = 3\%$, $\alpha = 0\%$, $\beta = 1\%$, $\lambda = 1$ e $x = 40$	89
Quadro 5: Estrutura temporal das taxas de juro	105
Quadro 6: Volatilidades implícitas associadas a <i>swaptions</i> (11-06-2007)	106
Quadro 7: Volatilidades implícitas associadas a <i>swaptions</i> (21-06-2010)	106
Quadro 8: Preços de <i>swaptions</i> calculados pela fórmula de Black-76 (11-06-2007) .	107
Quadro 9: Preços de <i>swaptions</i> calculados pela fórmula de Black-76 (21-06-2010) .	107
Quadro 10: Volatilidades implícitas associadas a opções sobre o índice Euro Stoxx 50 (11-06-2007).....	108
Quadro 11: Volatilidades implícitas associadas a opções sobre o índice Euro Stoxx 50 (21-06-2010).....	108
Quadro 12: Preços de opções sobre o índice Euro Stoxx 50 calculados pela fórmula de Black-Scholes (11-06-2007).....	109
Quadro 13: Preços de opções sobre o índice Euro Stoxx 50 calculados pela fórmula de Black-Scholes (21-06-2010).....	109
Quadro 14: Diferenças relativas entre os preços teóricos das <i>swaptions</i> e os preços do modelo (11-06-2007).....	110
Quadro 15: Diferenças relativas entre os preços teóricos das <i>swaptions</i> e os preços do modelo (21-06-2010).....	110
Quadro 16: Diferenças relativas entre os preços teóricos das opções sobre o índice Euro Stoxx 50 e os preços do modelo (11-06-2007)	111
Quadro 17: Diferenças relativas entre os preços teóricos das opções sobre o índice Euro Stoxx 50 e os preços do modelo (21-06-2010)	111

Quadro 18: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$,
 $g_A = 3\%$, $g_D = 0\%$, $g_S = 3\%$, $\alpha = 0\%$, $\beta = 1\%$, $\lambda = 1$ e $x = 20$ 118

Quadro 19: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$,
 $g_A = 3\%$, $g_D = 0\%$, $g_S = 3\%$, $\alpha = 0\%$, $\beta = 1\%$, $\lambda = 1$ e $x = 60$ 118

Quadro 20: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$,
 $g_A = 3\%$, $g_D = 0\%$, $g_S = 0\%$, $\alpha = 0\%$, $\beta = 1\%$, $\lambda = 1$ e $x = 40$ 119

Quadro 21: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$,
 $g_A = 3\%$, $g_D = 0\%$, $g_S = 3\%$, $\alpha = 0\%$, $\beta = 2\%$, $\lambda = 1$ e $x = 40$ 119

Quadro 22: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$,
 $g_A = 3\%$, $g_D = 0\%$, $g_S = 3\%$, $\alpha = 0\%$, $\beta = 1\%$, $\lambda = 1,1$ e $x = 40$ 120

Índice de Gráficos

Gráfico 1: Evolução dos índices Euro Stoxx 50 e VStoxx.....	68
Gráfico 2: Estrutura temporal das taxas de juro sem risco (Euro <i>Swap</i>).....	70
Gráfico 3: Erros de ajustamento (11-06-2007).....	73
Gráfico 4: Erros de ajustamento (21-06-2010).....	74
Gráfico 5: Evolução das taxas de juro de curto prazo (11-06-2007).....	75
Gráfico 6: Evolução das taxas de juro de curto prazo (21-06-2010).....	76
Gráfico 7: Investimento de 50% em acções e 50% em obrigações (11-06-2007).....	85
Gráfico 8: Investimento de 50% em acções e 50% em obrigações (21-06-2010).....	85
Gráfico 9: Frequência relativa de exercício da opção de resgate em cada ano de projecção (11-06-2007)	92
Gráfico 10: Frequência relativa de exercício da opção de resgate em cada ano de projecção (21-06-2010)	92
Gráfico 11: Investimento de 75% acções e 25% em obrigações (11-06-2007)	112
Gráfico 12: Investimento de 50% acções e 50% em obrigações (11-06-2007)	112
Gráfico 13: Investimento de 25% acções e 75% em obrigações (11-06-2007)	113
Gráfico 14: Investimento de 75% acções e 25% em obrigações (21-06-2010)	113
Gráfico 15: Investimento de 50% acções e 50% em obrigações (21-06-2010)	114
Gráfico 16: Investimento de 25% acções e 75% em obrigações (21-06-2010)	114
Gráfico 17: $\delta = 0,25$ e $D=1$ (11-06-2007)	115
Gráfico 18: $\delta = 0,25$ e $D=5$ (11-06-2007)	115
Gráfico 19: $\delta = 0,25$ e $D=10$ (11-06-2007)	116
Gráfico 20: $\delta = 0,25$ e $D=1$ (21-06-2010)	116
Gráfico 21: $\delta = 0,25$ e $D=5$ (21-06-2010)	117
Gráfico 22: $\delta = 0,25$ e $D=10$ (21-06-2010)	117

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Onofre Alves Simões, pela sua preciosa ajuda, interesse e tolerância inesgotável.

Ao Conselho Directivo do Instituto de Seguros de Portugal e ao Dr. Gabriel Bernardino, pela oportunidade de aprendizagem que me foi concedida.

Ao Dr. Mário Ribeiro, ao Dr. Hugo Borginho e aos meus colegas do Instituto de Seguros de Portugal, pela sua preocupação e incentivo constantes.

À minha família e a todos os meus amigos pela sua compreensão e apoio incondicional ao longo deste último ano.

À minha avó, a quem dedico este trabalho.

1. Introdução

As empresas de seguros que exploram o ramo Vida têm vindo a desempenhar, cada vez mais, um papel importante na captação de poupança a médio e longo prazo. Para este facto muito tem contribuído o aumento tendencial da produção de seguros de vida de forte componente financeira e de seguros ligados a fundos de investimento, os quais concorrem com outros produtos do sector financeiro.

No caso específico dos seguros ligados a fundos de investimento, a tradicional função de protecção dos riscos associados à vida das pessoas seguras tende a desempenhar um papel pouco relevante, quando comparado com a vertente financeira. Ainda assim, as empresas de seguros podem assumir uma componente de risco, como por exemplo o pagamento de um dado benefício garantido em caso de morte. Já no que se refere à função financeira, o risco de investimento é, regra geral, suportado pelo tomador do seguro, existindo no entanto a possibilidade de se concederem garantias quanto ao investimento efectuado.

No mercado português, a existência de tais garantias não é actualmente uma característica muito comum. Contudo, em alguns países europeus tem vindo a desenvolver-se uma nova geração de produtos, caracterizados precisamente por serem seguros ligados a fundos de investimento com garantias financeiras. Estes produtos são já bastante populares nos Estados Unidos da América e no Japão, sendo comumente designados por “anuidades variáveis”, ainda que de um ponto de vista conceptual esse termo possa ser utilizado de uma forma mais abrangente.

Atendendo à existência de uma grande variedade de opções contratuais e garantias financeiras, é prática comum recorrer a um conjunto de siglas para designar as diferentes coberturas das anuidades variáveis, sendo a classificação mais frequente a que a seguir se apresenta:

- **GMAB (*Guaranteed Minimum Accumulation Benefit*)**

A empresa de seguros garante um benefício mínimo em caso de vida, em geral à data de termo do contrato, que é comparado ao valor da conta corrente do tomador do seguro nessa mesma data, sendo pago o maior dos dois.

- **GMDB (*Guaranteed Minimum Death Benefit*)**

Esta cobertura assegura o pagamento de um benefício em caso de morte não inferior a um montante mínimo garantido. Regra geral, este montante corresponde ao valor dos prémios investidos, deduzido de possíveis reembolsos já efectuados até à data de falecimento da pessoa segura.

- **GMWB (*Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit*)**

Em traços gerais, este tipo de cobertura garante retornos mínimos periódicos, mediante o resgate sem penalização de um determinado montante, em geral de forma anual, durante um período de tempo previamente definido. O montante resgatado é limitado superiormente, como por exemplo, por uma proporção do prémio inicial investido. Caso a cobertura assuma um carácter vitalício, *i.e.*, se mantenha em vigor até à data de

falecimento da pessoa segura, toma a designação de GLMB (*Guaranteed Lifelong Withdrawal Benefit*).

- **GMIB (*Guaranteed Minimum Income Benefit*)**

Tal como nos GMAB, esta cobertura assegura um benefício mínimo numa data futura previamente acordada, embora a garantia apenas se aplique caso o respectivo montante seja transformado numa anuidade, em geral uma renda vitalícia, com base numa taxa de conversão pré-definida. A opção de conversão está assim dependente da preferência do tomador do seguro, sendo-lhe facultada a possibilidade de receber o valor integral da conta corrente nessa data, mesmo que tal possa não representar uma decisão óptima.

A popularidade das anuidades variáveis encontra-se estreitamente ligada ao facto de estes produtos conjugarem as vantagens de transparência e flexibilidade, face aos seguros de vida mais tradicionais – aliás, características já presentes nos seguros ligados a fundos de investimento – com a concessão de um leque alargado de opções contratuais e garantias financeiras. Tais garantias permitem aos tomadores de seguros beneficiar de evoluções favoráveis dos mercados de capitais, sem contudo incorrerem no risco de perdas abaixo dos níveis garantidos.

Na perspectiva das empresas, o desenho, *pricing* e *hedging* das anuidades variáveis têm representado um novo desafio para o sector segurador. Efectivamente, se por um lado as garantias financeiras têm por finalidade proteger os tomadores de seguros contra eventuais cenários adversos de evolução dos valores de referência, nessas situações compete às empresas de seguros assegurar os capitais investidos ou as taxas de rendibilidade garantidas. Neste quadro salienta-se que os desenvolvimentos em matéria

de técnicas de *hedging*, aliados à crescente sofisticação dos mercados financeiros, principalmente dos mercados de produtos derivados, constituíram um factor-chave para a crescente comercialização das anuidades variáveis.

Ainda assim, a recente crise financeira internacional veio evidenciar as falhas que podem estar associadas aos programas de *hedging*, tendo constituído um desafio assegurar os níveis de protecção adequados, face a um cenário de fortes quebras e de elevada volatilidade nos mercados de capitais. Salienta-se, no entanto, que outras práticas das empresas, como a assunção de riscos excessivos, muitos dos quais *non-hedgeable*, ou a concessão de garantias generosas sem a necessária contrapartida em termos de cargas específicas cobradas aos tomadores de seguros, foram alguns dos aspectos que contribuíram fortemente para acentuar o impacto negativo da crise.

De facto, esta experiência evidencia, à semelhança de outras situações observadas no passado, a importância de uma avaliação adequada dos riscos associados às opções contratuais e garantias financeiras embutidas nos contratos de seguros, tanto no processo de desenho e *pricing* dos produtos como na gestão contínua desses riscos.

Enquadrado no contexto do projecto Solvência II, o presente trabalho tem como objectivo apresentar uma possível metodologia de avaliação de contratos de seguros ligados a fundos de investimento com determinadas opções contratuais e garantias financeiras, utilizando-se como referência algumas das características presentes nas anuidades variáveis. Ressalva-se, contudo, que o respectivo âmbito se cinge essencialmente à problemática do cálculo das provisões técnicas com base em princípios económicos, não se pretendendo aprofundar questões relacionadas com as melhores práticas de desenho, *pricing* ou gestão contínua dos riscos associados a esses produtos, ainda que todos estes aspectos estejam de alguma forma interligados entre si.

Efectivamente, conforme se pode constatar pela leitura do Capítulo 2, uma grande parte da literatura que esteve na base do trabalho foca-se no *pricing* de diferentes tipologias de anuidades variáveis. Apesar da divergência em termos de objectivos de análise, as metodologias apresentadas nesses trabalhos são igualmente válidas para efectuar o cálculo pretendido, sendo contudo necessário ter em atenção que a estrutura de encargos já se encontra definida à data de avaliação.

No Capítulo 3 começa-se por efectuar uma breve descrição dos princípios, abordagens e metodologias que devem estar subjacentes a uma avaliação *market-consistent* das responsabilidades de seguros. Atendendo a que a avaliação de opções e garantias pode muitas vezes ser efectuada em conformidade com as metodologias de *pricing* de instrumentos financeiros derivados, para algumas tipologias de anuidades variáveis é estabelecida uma analogia entre os *cash-flows* tipicamente gerados por esses contratos e o esquema de pagamentos de determinadas opções financeiras. Seguindo esta linha de raciocínio, o valor das opções e garantias, tal como acontece para alguns instrumentos derivados, pode ser calculado com base em metodologias de simulação estocástica ou recorrendo a soluções analíticas, quando estas sejam conhecidas. Em geral, devido à complexidade das características dos contratos de seguro na presença de opções e garantias, a primeira alternativa tende a ser mais praticável, pelo que também aqui se optou por essa via.

Para efeitos de avaliação de opções e garantias é necessário proceder à simulação da trajectória de evolução do valor de determinadas variáveis financeiras, com base nas quais se poderá determinar o comportamento dos *cash-flows* associados aos contratos de seguro. O uso de cenários económicos futuros para efeitos de avaliação envolve o desconto dos *cash-flows*, de modo a obter o respectivo valor actual esperado. Tipicamente, numa avaliação *market-consistent*, a geração de cenários tem por base a

hipótese de que os *cash-flows* serão descontados sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco.

A apresentação dos modelos utilizados na projecção de cenários económicos futuros, nomeadamente quanto ao risco de taxa de juro e ao risco accionista, é efectuada no Capítulo 4. É dado algum enfoque ao processo da sua calibragem, atendendo ao princípio de que devem ser especificados e parametrizados de modo a reproduzir os preços de instrumentos financeiros transaccionados em mercados suficientemente líquidos, profundos e transparentes.

Por último, considera-se útil e relevante terminar a exposição com uma exemplificação da implementação prática das metodologias apresentadas, numa tentativa de tornar mais perceptível a teoria e os conceitos apresentados, bem como identificar e ilustrar algumas das dificuldades e limitações inerentes. Para esse efeito, propõe-se o estudo de contratos exemplificativos com coberturas do tipo GMAB e GMDB, por serem as garantias que podem em geral ser identificadas mesmo em seguros ligados que não sejam classificados como anuidade variável. Considera-se igualmente a possibilidade do tomador do seguro antecipar o termo do contrato (“opção de resgate¹”), recebendo em contrapartida um montante, líquido do encargo de resgate, correspondente ao máximo entre o valor da conta corrente e um benefício mínimo, determinado de forma independente da evolução dos fundos de investimento subjacentes.

¹ No presente trabalho, o conceito “opção de resgate” é utilizado para designar o termo antecipado do contrato, sendo as situações referentes ao resgate parcial de um determinado montante identificadas explicitamente.

2. Revisão de Literatura

Ao longo da última década têm vindo a ser produzidos inúmeros trabalhos no âmbito da avaliação de opções contratuais e garantias financeiras, englobando desde seguros mais tradicionais com participação nos resultados até produtos mais inovadores, como as anuidades variáveis. Em resultado da diversidade das coberturas e da existência de diferentes perspectivas e metodologias para abordar o mesmo problema, a literatura em torno desta temática é bastante vasta e encontra-se em constante actualização. Como tal, na exposição que se segue apenas serão citados os contributos que se considera serem mais relevantes.

Refira-se, antes de mais, que o forte interesse pela matéria em questão tem sido impulsionado pelo crescente reconhecimento da importância de uma avaliação apropriada do valor das opções e garantias embutidas nos contratos comercializados pelas empresas de seguros. Muitos dos trabalhos encontram-se assim direccionados para o propósito de *pricing*, com o intuito de determinar as cargas “justas” a cobrar aos tomadores de seguros e comparar as mesmas com as cargas tipicamente praticadas no mercado. Por outro lado, a implementação das novas normas internacionais de contabilidade, com a introdução do conceito do “justo valor” na avaliação das responsabilidades de seguros, o cálculo do *market consistent embedded value* (MCEV) e o desenvolvimento do projecto Solvência II, têm igualmente incentivado o estudo de metodologias que permitam efectuar a avaliação dos passivos de forma tão próxima quanto possível ao seu valor de mercado.

Neste sentido, tem havido um crescente interesse pelo estudo e adaptação de metodologias de *pricing* de opções financeiras para efeitos de avaliação de contratos de seguro. Os trabalhos realizados no contexto dos seguros ligados com garantias financeiras e, mais concretamente das anuidades variáveis, são um exemplo disso.

Em Milevsky e Posner (2001) são estudadas diferentes variantes da cobertura GMDB. Os autores recorrem à teoria das opções financeiras para a respectiva avaliação, atendendo ao facto da garantia embutida poder ser accionada antecipadamente, no decurso da ocorrência de um evento não dependente da evolução da variável financeira subjacente. Esta opção é designada por “opção Titanic”.

O tema da avaliação de coberturas do tipo GMDB continua a ser abordado em vários trabalhos posteriores, geralmente em conjunto com a análise de outras características contratuais das anuidades variáveis, designadamente a opção de resgate total ou parcial dos contratos. Neste contexto podem referir-se, por exemplo, os contributos de Milevsky e Salisbury (2002) e Bauer *et al.* (2006).

A abordagem a adoptar na determinação do valor da opção de resgate, em particular no que se refere à assunção de hipóteses quanto ao comportamento futuro do tomador do seguro, é uma problemática bastante controversa e tem incentivado o desenvolvimento de diferentes metodologias de avaliação. Como se verá nos parágrafos seguintes, enquanto alguns autores analisam o problema assumindo que os tomadores de seguros agem sempre de uma forma racional, outros apresentam abordagens que permitem atender às decisões sub-óptimas dos mesmos. É também comum efectuarem-se comparações em termos do impacto nos resultados da assunção de uma ou outra perspectiva de modelação.

Em Milevsky e Salisbury (2002) é apresentado um modelo para a avaliação de anuidades variáveis com possibilidade de resgate, dando-se particular relevo ao tratamento dos encargos a cobrar aos tomadores de seguros em caso de resgate. A avaliação desta opção é encarada como um problema de paragem óptima, assente na hipótese de que os tomadores de seguros se comportam de forma racional, efectuando-se uma analogia com o *pricing* de uma opção Americana.

Posteriormente (2006), os mesmos autores apresentam metodologias de *pricing* de coberturas do tipo GMWB. Numa primeira etapa, adoptam uma abordagem estática relativamente à estratégia de resgate parcial do tomador do seguro, e admitindo que o contrato se mantém em vigor até à sua data de termo. Em seguida, comparam-na com uma abordagem dinâmica, onde se procura efectuar a avaliação com base num problema de paragem óptima.

Em Bauer *et al.* (2006) é introduzido um modelo que visa possibilitar uma análise consistente e extensiva de várias tipologias de anuidades variáveis. Os autores procuram igualmente propor abordagens distintas de avaliação de contratos na presença da opção de resgate total e parcial, em função de diferentes hipóteses relativamente ao comportamento dos tomadores de seguros.

Nos trabalhos mencionados recorre-se a um movimento Browniano geométrico para efeitos de modelação do comportamento do activo subjacente, mas há alguns outros em que se procura utilizar modelos mais sofisticados.

A título de exemplo, em Chen *et al.* (2008) é explorado o efeito da assunção de diferentes estratégias de resgate no valor de coberturas do tipo GMWB, bem como o impacto da consideração de um processo de saltos na modelação da evolução do activo subjacente.

Já em Peng *et al.* (2009) analisa-se o problema da avaliação de uma cobertura do tipo GMWB, sob uma abordagem estática ao nível da opção de resgate parcial e assumindo taxas de juro estocásticas, para o que se recorre ao modelo de Vasicek.

Note-se que a discussão em torno da modelação do comportamento do tomador do seguro não é específica às anuidades variáveis, sendo igualmente relevante mencionar alguns trabalhos realizados no âmbito de outras modalidades de seguro.

Andreatta e Corradin (2003) desenvolvem uma metodologia de determinação do valor da opção de resgate em contratos de seguros não ligados com participação nos resultados, com base no método de *Least Squares* Monte Carlo, apresentado por Longstaff e Schwartz (2001), com o objectivo de avaliar opções Americanas. Para efeitos de simulação da evolução da carteira de activos de referência, que se assume ser composta por títulos de dívida e acções, considera-se o modelo de Black-Scholes-CIR++.

O método de *Least Squares* Monte Carlo é também implementado, por exemplo, em Bernard e Lemieux (2008), que tratam de contratos de seguros ligados a um índice accionista, e em Bacinello (2008).

3. Princípios e metodologias de avaliação de opções e garantias

Na secção seguinte procura fazer-se uma síntese das principais orientações emitidas no âmbito do projecto Solvência II, em matéria de avaliação de opções contratuais e garantias financeiras embutidas nos contratos de seguro. Naturalmente, tais orientações não se podem dissociar do quadro geral de cálculo das provisões técnicas com base em princípios económicos, no qual a questão em estudo se encontra inserida.

3.1. Cálculo das provisões técnicas num ambiente Solvência II

Os princípios consagrados na Directiva 2009/138/CE, de 25 de Novembro (Solvência II), estabelecem que o valor das provisões técnicas deve corresponder ao montante que uma empresa de seguros teria de pagar, caso transferisse de forma imediata as suas responsabilidades para uma outra empresa de seguros.

Considerando que, ao contrário do que acontece para a maior parte dos activos, as responsabilidades de seguros não são frequentemente transaccionadas entre empresas, não existindo portanto um mercado activo onde o seu preço possa ser directamente observado, o respectivo cálculo exige a aplicação de uma abordagem económica, com a finalidade de produzir uma avaliação consistente com o preço de mercado de

instrumentos financeiros que apresentem características similares. Este cálculo deve assim respeitar o princípio de ausência de oportunidades de arbitragem, de forma a assegurar que dois conjuntos de *cash-flows* idênticos tenham o mesmo valor de mercado, independentemente dos activos ou estratégias que estejam na sua origem.

Num ambiente Solvência II, a avaliação das responsabilidades de seguros de uma forma economicamente coerente será, regra geral, efectuada com base na soma entre uma melhor estimativa do valor actual esperado dos *cash-flows* futuros e uma margem de risco. A margem de risco destina-se a compensar o custo que uma empresa de seguros teria de suportar, relativamente a riscos *non-hedgeable*, aquando da aceitação da carteira de responsabilidades de uma outra empresa.

Contudo, nos casos em que os *cash-flows* associados às responsabilidades de seguros possam ser reproduzidos com fiabilidade a partir de instrumentos financeiros para os quais exista um valor de mercado fiável, o valor das provisões técnicas é dado directamente pelo preço de mercado desses instrumentos financeiros.

Refira-se que, em resultado da existência de factores de risco específicos de seguros, tais como os riscos biométricos, de despesas, ou os decorrentes do comportamento dos tomadores de seguros, o âmbito de aplicação desta última alternativa é bastante restrita. Efectivamente, mesmo que em teoria seja possível criar uma exposição ao risco semelhante, na prática há que atender ao facto de poderem não existir no mercado instrumentos financeiros adequados à natureza e maturidade das responsabilidades de seguros.

Para esses casos, em oposição à aplicação de uma abordagem *mark-to-market*, a alternativa consiste em recorrer a uma abordagem *mark-to-model*, assente numa

combinação da teoria económica com a extrapolação de informação quanto a instrumentos financeiros não transaccionados no mercado.

Para os contratos que assumam uma natureza mais financeira, esse tipo de abordagem torna geralmente necessário o recurso a um gerador de cenários económicos, no intuito de simular a evolução de determinadas variáveis económico-financeiras, com influência no comportamento dos *cash-flows* das responsabilidades. No que respeita à projecção de cenários, tal pode ser realizado de formas distintas.

Uma possível via assenta na avaliação neutra face ao risco, através de um ajustamento na probabilidade de ocorrência dos diferentes cenários futuros. Para isso, deverá simular-se a trajectória dos *cash-flows* num ambiente neutro face ao risco, *i.e.*, assumindo que o retorno esperado para todas as classes de activos é igual à taxa de juro sem risco, sendo os *cash-flows* descontados a essa mesma taxa. Esta abordagem é geralmente aplicada no *pricing* de instrumentos financeiros derivados.

Como alternativa, pode considerar-se o uso de medidas de probabilidade reais na projecção dos *cash-flows* e introduzir um ajustamento nas taxas de juro utilizadas para efeitos de desconto, por inclusão de um prémio de risco conhecido pelo termo “deflator”.

Os deflatores visam reflectir a compensação, acima da taxa de juro sem risco, exigida pelos investidores para suportar a incerteza associada aos *cash-flows* futuros. Esta abordagem é geralmente utilizada na análise de problemas de adequação de capital económico, onde a consistência com os preços de mercado num dado momento do tempo não é um requisito fundamental.

Como se verá mais adiante, na presença de opções e garantias, os *cash-flows* dos contratos de seguros ligados a fundos de investimento podem muitas vezes ser

equiparados a esquemas de pagamento de instrumentos financeiros derivados, pelo que a aplicação de uma avaliação neutra face ao risco demonstra ser adequada para esses casos.

Por outro lado, assim como o *pricing* de instrumentos financeiros derivados admite por vezes uma solução analítica, na avaliação de opções e garantias também se prevê essa possibilidade.

As soluções analíticas apresentam como grande vantagem a simplicidade e rapidez de cálculo, tendo sido objecto de estudo de alguns dos trabalhos referenciados no Capítulo 2, designadamente Milevsky e Salisbury (2002) e Peng *et al.* (2009), com o intuito de adaptar as fórmulas de *pricing* de instrumentos financeiros derivados à avaliação de responsabilidades de seguros. Ainda assim, existem características dos contratos de seguro que dificilmente conseguem ser adequadamente captadas, comprometendo a utilidade prática dessas fórmulas.

Um exemplo típico é a existência de estruturas de dependência nos *cash-flows* das responsabilidades de seguros, em resultado, por exemplo, do comportamento dos tomadores de seguros, dos prémios futuros ou de acções de gestão futuras por parte das empresas. Essas acções de gestão têm muitas vezes impacto na composição das carteiras de investimento, que podem variar ao longo do período de vigência dos contratos. Mesmo que as soluções analíticas permitam ter em consideração a evolução do comportamento de diferentes classes de activos de forma simultânea, têm normalmente subjacente uma alocação estática do investimento por classes de activos.

Os aspectos apontados evidenciam que a escolha de utilização, ou não, de uma solução analítica deve atender às características específicas dos contratos de seguro em causa e à materialidade dos riscos subjacentes. De facto, para contratos de seguros com

características mais complexas é expectável que a simulação estocástica produza resultados mais adequados.

No entanto, convém realçar que o mecanismo de simulação também tem algumas limitações, entre as quais o erro de amostragem associado aos resultados. Uma das formas de minimizar esse erro é proceder a um elevado número de simulações, o que torna o processo bastante exigente de um ponto de vista computacional. Considerando o número de apólices que a carteira de uma empresa de seguros pode conter, a avaliação apólice a apólice torna-se quase impraticável. De forma a contornar este problema, é comum as empresas recorrerem a uma projecção por *model points*, correspondendo cada *model point* a uma apólice que visa representar um conjunto de contratos com características similares.

Refira-se, em último lugar, que a componente da melhor estimativa deve ser calculada sem entrar em linha de conta com os efeitos mitigantes decorrentes de programas de *hedging* dos riscos com recurso a instrumentos derivados, ou de montantes recuperáveis de contratos de resseguro e outros instrumentos de securitização. Esta ressalva tem particular relevância para o tipo de contratos que se pretende avaliar, pois não é de esperar que as empresas de seguros concedam garantias financeiras sem se precaverem com os necessários mecanismos de cobertura ou transferência dos riscos assumidos.

3.2. Modelo de avaliação de algumas opções e garantias embutidas nas anuidades variáveis

As anuidades variáveis são, na sua essência, seguros ligados a fundos de investimento com garantias financeiras. O prémio pago pelo tomador do seguro, de forma única ou

periódica, e após dedução dos encargos relevantes, é geralmente investido em um ou mais fundos, com perfis de risco diferenciados. São muitas vezes disponibilizadas diferentes alternativas de investimento e ainda a possibilidade de alterar as respectivas estratégias ao longo do período de vigência do contrato de seguro.

Nas anuidades variáveis, os benefícios mínimos estabelecidos podem consistir simplesmente numa garantia dos prémios investidos, ou ser crescentes ao longo do tempo. Neste último caso, as diferentes variantes assumem denominações específicas, tal como “*roll-up*” ou “*ratchet*”, sendo a primeira referente à capitalização dos prémios investidos a uma taxa garantida e a segunda ao reajustamento dos benefícios garantidos, de forma periódica, em função do desempenho do fundo de investimento subjacente, ou de uma taxa pré-definida.

Recorrendo a um pouco mais de formalismo, designe-se por P o montante do prémio único, já deduzido de eventuais encargos, que é investido à data de início do contrato e por CC_t o valor da conta corrente do tomador do seguro no momento t , tal que $CC_0 = P$. Adicionalmente, denote-se por FI_t o valor do fundo de investimento de referência em t e por UP_t o valor de cada unidade de participação desse fundo na mesma data.

Assumindo a hipótese, também proposta por exemplo em Bauer *et al.* (2006), de que durante o período de vigência do contrato todos os encargos são deduzidos continuamente ao valor da conta corrente a uma taxa α , tem-se para o momento t

$$CC_t = CC_{t-1} \frac{FI_t}{FI_{t-1}} e^{-\alpha(t-(t-1))} = CC_{t-1} \frac{FI_t}{FI_{t-1}} e^{-\alpha}. \quad [3.1]$$

Note-se que ao longo desse mesmo horizonte temporal, o tomador do seguro pode, entre outras opções contratuais, efectuar um resgate parcial ou total do contrato, e ainda falecer.

Tomando como base a notação e as hipóteses enunciadas, nos pontos que se seguem serão analisados alguns casos específicos de anuidades variáveis, partindo de uma cobertura simples do tipo GMAB, e estendendo subsequentemente o âmbito para coberturas que prevêm um benefício mínimo em caso de morte e também a opção de resgate.

3.2.1. Garantia de um benefício mínimo à data de termo do contrato

Seja G_T^A o benefício mínimo garantido à data de termo do contrato, T , numa cobertura do tipo GMAB. A forma como este montante evolui ao longo do tempo depende das especificações contratuais. Se, a título de exemplo, estiver sujeito a um *roll-up*, o valor do benefício mínimo no momento t será dado por $G_t^A = G_{t-1}^A(1 + g_A)$, onde g_A é a taxa de capitalização garantida.

Considerando um contrato a prémio único e sem opção de resgate, e ignorando por agora a componente dos encargos que incide sobre o valor da conta corrente, o número de unidades de participação do fundo de investimento de referência, adquiridas à data de início do contrato, será igual a $n = P/UP_0$. Para qualquer $t \in [0, T]$, o valor da conta corrente será dado pelo produto entre n e UP_t .

O valor do benefício à data de termo do contrato pode ser expresso em função do esquema de pagamento de opções Europeias, tal como demonstrado em seguida.

$$\begin{aligned}
 V_T^A &= \max\{CC_T, G_T^A\} = \\
 &= CC_T + \max\{G_T^A - CC_T, 0\} = CC_T + n \times \overbrace{\max\{K_T^A - UP_T, 0\}}^{\text{payoff de uma opção put Europeia}} =, \quad [3.2] \\
 &= G_T^A + \max\{CC_T - G_T^A, 0\} = G_T^A + n \times \overbrace{\max\{UP_T - K_T^A, 0\}}^{\text{payoff de uma opção call Europeia}}
 \end{aligned}$$

onde $K_T^A = G_T^A / n$.

Com efeito, caso sejam transaccionadas no mercado opções Europeias sobre um activo com um comportamento idêntico ao das unidades de participação do fundo de investimento de referência, com maturidade em T e preço de exercício K_T^A , seria possível criar uma estrutura de *cash-flows* semelhante, através do investimento de um montante P nesse activo e da aquisição de n opções *put* com as características referidas. Em alternativa, poder-se-ia investir em G_T^A unidades de uma obrigação de cupão zero com maturidade em T e valor principal unitário e adquirir n opções *call* com a mesma maturidade e preço de exercício.

Assumindo a hipótese de que a taxa de juro sem risco, r , é constante para todas as maturidades e cenários, então, sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco, o valor do contrato descontado para o momento 0 seria igual a

$$\xi(CC_0, g_A, T) = e^{-rT} E[V_T^A]. \quad [3.3]$$

3.2.2. Garantia de um benefício mínimo em caso de morte

Designa-se por G_t^D o montante a que os beneficiários terão direito em caso de morte da pessoa segura durante o período de vigência da apólice, num contrato que inclui uma cobertura do tipo GMDB.

Como hipótese, assume-se que o comportamento da mortalidade é independente da evolução dos mercados financeiros e que o risco de mortalidade é diversificável através do aumento do número de apólices de uma dada carteira de seguros. Quer isto significar que, se as flutuações da mortalidade podem ser eliminadas em relação a uma carteira de apólices, então não existe razão para que a empresa de seguros exija uma compensação para assumir o respectivo risco. Consequentemente, as taxas de mortalidade reais podem ser tomadas como *proxy* para as taxas de mortalidade calculadas sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco.

Seja ${}_t p_x$ a probabilidade de uma pessoa de idade x se encontrar viva à idade $x+t$ e q_{x+t} a probabilidade de uma pessoa com $x+t$ anos de idade falecer durante o ano seguinte.

Tendo presente a expressão [3.3], o valor no momento 0 de um contrato de seguro que, em adição a uma garantia de um benefício mínimo à data de termo do contrato, inclui uma cobertura do tipo GMDB, pode ser determinado pela expressão

$$V_0^{AD} = {}_T p_x \times \zeta(CC_0, g_A, T) + \sum_{t=0}^{T-1} {}_t p_x q_{x+t} \times \zeta(CC_0, g_D, t+1), \quad [3.4]$$

onde g_D representa a taxa de capitalização do benefício mínimo em caso de morte ao longo do período de vigência da apólice.

Ressalva-se que uma das principais críticas colocadas à adoção de uma abordagem de cálculo determinística, assente na diversificação do risco de mortalidade, reside no facto da dimensão da carteira de seguros poder não ser suficiente para eliminar o referido risco na sua totalidade. Por outro lado, mesmo para carteiras de grande dimensão, existe geralmente uma componente que não é diversificável – o risco de longevidade.

Para contratos de curto e médio prazo, o impacto do risco de longevidade não será, à partida, muito material. Contudo, na avaliação de contratos de longo prazo, especialmente os que assumem uma componente vitalícia, cada vez mais se procura ter atenção a esse efeito, nomeadamente através do recurso a um modelo estocástico para a simulação da evolução da tendência futura da mortalidade. A título de exemplo, refira-se que em Ballotta *et al.* (2006) é desenvolvido um modelo para o *pricing* de anuidades incorporando o risco de taxa de juro e o risco de mortalidade. Este último é tido em consideração através do cálculo de probabilidades de sobrevivência a partir de um modelo estocástico para a mortalidade.

3.2.3. Opção de resgate

As opções contratuais concedem determinados direitos aos tomadores de seguros que, se exercidos de forma óptima, podem implicar uma redução dos ganhos, ou mesmo perdas, para as empresas de seguros.

De entre o conjunto de opções contratuais, a opção de resgate é provavelmente uma das mais estudadas, estando presente em diversas modalidades de seguros do ramo Vida, especialmente nos seguros de componente mais financeira. Esta opção concede ao

tomador do seguro o direito de findar o contrato, total ou parcialmente, antes da data do seu termo, recebendo em contrapartida um benefício designado por “valor de resgate”.

O exercício da opção de resgate pode ser desfavorável para a empresa de seguros quando, por exemplo, o valor das despesas com os contratos não tenha sido ainda recuperado na íntegra. Por outro lado, os pagamentos antecipados em resposta às exigências de resgate podem implicar a liquidação de activos depreciados. As empresas de seguros podem ainda estar sujeitas a fenómenos de selecção adversa, pelo que em algumas modalidades não se encontra prevista essa possibilidade, ou são aplicadas penalizações de forma a minimizar o referido risco.

Os motivos que conduzem ao exercício da opção de resgate podem, em geral, ser agrupados em dois grandes conjuntos:

- factores intrínsecos aos tomadores de seguros, tais como a falta de liquidez, a passagem a uma situação de desemprego, o estado de saúde (risco geralmente diversificável); ou
- factores económico-financeiros (risco que pode ter um impacto sistémico).

No mundo real, a decisão de exercer a opção de resgate num dado momento do tempo pode ser influenciada, em simultâneo, por factores de ambas as naturezas. Idealmente, a modelação do risco de resgate deveria atender tanto às expectativas do tomador do seguro quanto ao valor residual do contrato, como a factores que podem implicar a necessidade de exercício da opção, mesmo que tal não seja óptimo de um ponto de vista económico. Contudo, tal demonstra ser de difícil concretização prática.

De um modo geral, esta questão tende a ser abordada:

- ou seguindo uma perspectiva estática, nomeadamente através do estabelecimento de pressupostos relativamente às taxas de resgate em função do tipo de produto, da idade do tomador do seguro, do número de anos decorridos desde o início do contrato, entre outros;
- ou adoptando uma perspectiva dinâmica, podendo o tomador do seguro agir, ou não, de uma forma totalmente racional sob o ponto de vista económico (Bernard e Lemieux (2008)).

No contexto da segunda abordagem, que será analisada com maior detalhe neste trabalho, pode efectuar-se uma analogia com uma opção Americana, de maturidade igual ao prazo do contrato e preço de exercício correspondente ao valor de resgate. O valor da opção de resgate é, deste modo, interpretado como a diferença entre o preço de uma opção Americana e o de uma opção Europeia que, como se viu nas secções 3.2.1. e 3.2.2., se utiliza na representação de um contrato com garantias financeiras. Segundo esta perspectiva, a opção será exercida quando

$$VR_t > VC_t, \quad [3.5]$$

sendo VR_t o valor de resgate que o tomador do seguro irá receber no momento t e VC_t o valor residual do contrato, também designado por valor de mercado do contrato nesse mesmo instante.

A ideia subjacente à condição apresentada é bastante simples. Em cada momento t , o tomador do seguro compara o montante que irá receber em caso de exercício imediato

da opção, com o valor residual do contrato. Ao exercer a opção sempre que o primeiro for superior, o tomador do seguro tem, na teoria, a oportunidade de obter um ganho se, simultaneamente, reinvestir o respectivo montante num contrato com as mesmas características.

Salienta-se que uma das principais críticas apontadas a este tipo de abordagem decorre do já referido facto de que os tomadores de seguros se encontram sujeitos a motivações de diversas ordens, pelo que uma decisão óptima de um ponto de vista puramente económico pode não ser a que maximiza a sua função de utilidade. Para além disso, os tomadores de seguros dificilmente estarão cientes do valor residual do contrato a cada momento do tempo. Como tal, a adopção de uma abordagem deste género pode conduzir na prática a resultados demasiado prudentes na perspectiva das empresas de seguros.

Não obstante o referido, existem alguns argumentos a favor da aplicação de uma abordagem que tenha em conta a racionalidade dos tomadores de seguros, entre os quais o facto da opção de resgate poder ter um impacto muito substancial no valor das garantias, se exercida de forma óptima. Em particular, para os seguros ligados com garantias, é relevante estabelecer uma relação de interdependência entre o exercício da opção e a evolução do nível da conta corrente, face às garantias estabelecidas, em cada cenário futuro. Note-se que, de outra forma, estaria a negligenciar-se qualquer potencial racionalidade por parte dos tomadores de seguros, podendo incorrer-se numa subestimação dos riscos. Ademais, existem ajustamentos que podem ser efectuados à condição [3.5], de modo a contornar algumas das críticas apontadas e incrementar a aderência do modelo de avaliação à realidade, nomeadamente considerando que o tomador do seguro apenas irá exercer a opção de resgate se esta for claramente favorável.

Em Bernard e Lemieux (2008) propõe-se a introdução de um parâmetro $\lambda \geq 1$, tal que

$$VR_t > \lambda VC_t. \quad [3.6]$$

Os tomadores de seguros mais bem informados terão um λ próximo de 1. Por sua vez, os menos informados, ou aqueles que não demonstrem tanta preocupação pelos seus investimentos, apenas irão exercer a opção se o resultado for realmente interessante, *i.e.*, quando λ for claramente superior a 1. No limite, para valores de λ elevados, o valor da opção de resgate tende para zero².

Atendendo à analogia estabelecida, a avaliação de contratos com opção de resgate pode ser efectuada com base em metodologias de *pricing* de opções Americanas³, com particular destaque para a aplicação do método de *Least-Squares* Monte Carlo, proposto por Longstaff e Schwartz (2001). Refira-se, neste âmbito, que existem outras alternativas em termos de metodologias, incluindo o recurso a árvores binomiais (Bacinello (2003)). No entanto, a metodologia de simulação de Monte Carlo afigura-se mais adequada para o problema concreto que se pretende analisar, pelo elevado número de factores estocásticos tidos em consideração.

O algoritmo que se descreve em seguida é apresentado em Bernard e Lemieux (2008) e consiste numa extensão do método original de *Least-Squares* Monte Carlo, de forma a permitir a inclusão do factor de mortalidade. O objectivo deste algoritmo consiste em determinar o momento óptimo de exercício da opção de resgate para cada trajectória da simulação. Posteriormente, procede-se ao cálculo do valor actual dos *cash-flows*

² Uma outra possibilidade passaria pelo estabelecimento de uma regra, onde o exercício da opção de resgate em cada momento do tempo resultaria da comparação do nível da taxa garantida com outras variáveis económico-financeiras (*e.g.*, Furrer (2010)).

³ Note-se que sob o pressuposto de que a opção de resgate apenas pode ser exercida em certos momentos do tempo, o problema resume-se na verdade à avaliação de uma opção Bermudiana.

futuros, projectados em função do momento em que a opção será exercida, ou não exercida de todo.

Em primeiro lugar, é necessário simular diferentes trajectórias para a evolução do valor da conta corrente do tomador do seguro. O modelo utilizado para esse efeito será apresentado no Capítulo 4.

Seja t_i^* o momento óptimo de exercício da opção de resgate na trajectória i , com $i = 1, \dots, n$. O algoritmo proposto assenta numa lógica *backwards*, tendo como início o momento de termo do contrato, *i.e.*, $t_i^* = T$ e o valor residual do contrato $VC_T^i = V_T^{Ai}$. Note-se que V_T^{Ai} corresponde simplesmente a V_T^A dado por [3.2], substituindo CC_T por CC_T^i .

Seguidamente, para cada $t = T - 1, T - 2, \dots, 1$:

- se $VR_t^i > CE_t^i$, fixa-se $t_i^* = t$ e $VC_t^i = VR_t^i$,

onde CE_t^i representa uma estimativa do valor do contrato em caso de não exercício da opção de resgate no momento t , dado o valor da conta corrente nesse instante,

$$CE_t^i = e^{-r} E[VC_{t+1}^i | CC_t^i]; \quad [3.7]$$

- se $VR_t^i \leq CE_t^i$, procede-se à actualização do valor residual do contrato da seguinte forma,

$$VC_t^i = e^{-r} (q_{x+t} \xi(CC_t^i, g_D, 1) + p_{x+t} VC_{t+1}^i). \quad [3.8]$$

A principal dificuldade inerente à aplicação de uma técnica de Monte Carlo decorre do facto de, em cada momento, ser necessário conhecer o valor residual do contrato, o qual é dependente das decisões que o tomador do seguro irá tomar nas etapas seguintes.

O método de *Least-Squares* Monte Carlo é inovador no sentido de propor a estimação do valor esperado condicionado [3.7] com base na informação transversal ao conjunto de simulações, através de uma regressão de mínimos quadrados. Os coeficientes de regressão são dados por

$$\left(\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_M\right)^T = \left(\Psi^T \Psi\right)^{-1} \Psi^T \left(y_1, \dots, y_n\right)^T, \quad [3.9]$$

onde $y_i = e^{-r} VC_{t+l}^i$ e $\Psi_{i,l} = \psi_l(\cdot)$, com $i = 1, \dots, n$ e $l = 0, \dots, M$.

A escolha da função de regressão é uma etapa muito importante deste algoritmo, dado que a decisão de resgatar em cada trajectória depende do valor da função estimado transversalmente (*i.e.*, idêntico para todas as trajectórias) e não do valor residual do contrato intrínseco a cada trajectória.

Para efeitos de *pricing* de uma opção *put* Americana, Longstaff e Schwartz (2001) propõem a utilização de um polinómio de segundo grau, definido em função do valor do activo subjacente. Adicionalmente, recomenda-se que a regressão seja efectuada apenas sobre as trajectórias *in-the-money*, fundamentando-se no facto de que tal permite incrementar a eficiência do algoritmo.

Quando se aplica esta metodologia à avaliação de contratos de seguro, a regressão não se pode limitar apenas às trajectórias *in-the-money*, por duas razões essenciais. Por um lado, a avaliação é feita sobre o contrato como um todo e não apenas sobre o valor da opção de resgate. Por outro lado, não é possível verificar se a opção está *in-the-money*,

já que o valor da variável subjacente neste caso – o valor residual do contrato –, não é dado exogenamente, mas estimado pelo algoritmo em execução.

Adicionalmente, a consideração de todas as trajectórias leva a que seja necessário incluir um maior número de regressores para se atingir o mesmo nível de precisão. No Capítulo 5, aprofundar-se-á mais a questão da escolha de uma função de regressão para a avaliação de contratos de seguro.

Terminada a estimação dos coeficientes de regressão, para cada trajectória i , o valor esperado condicionado é determinado pela expressão

$$CE_t^i = q_{x+t} e^{-r} \xi(CC_t^i, g_D, 1) + p_{x+t} \sum_{l=0}^M \hat{\beta}_l \psi_l(\cdot). \quad [3.10]$$

Por último, atendendo aos resultados ao nível dos momentos óptimos de exercício da opção de resgate t_i^* , o valor do contrato no momento 0 é calculado através da média do valor descontado dos *cash-flows* associados a cada trajectória i ,

$$V_0^{A/D/S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(p_x e^{-rt_i^*} VR_{t_i^*}^i + \sum_{t=0}^{t_i^*-1} p_x q_{x+t} \xi(CC_0, g_D, t+1) \right), \quad [3.11]$$

onde n representa o número total de simulações e $VR_T^i = VC_T^i$.

4. Geração de cenários económicos

Um gerador de cenários económicos é uma ferramenta que visa produzir sequências aleatórias da evolução temporal de certas variáveis económico-financeiras, assumindo que os respectivos padrões comportamentais seguem determinados processos estocásticos, previamente definidos. Estas ferramentas podem ser mais ou menos complexas, em função, por exemplo, do número e natureza das variáveis modeladas, dos modelos utilizados, ou da forma como a eventual correlação entre as variáveis é tida em consideração.

A projecção de cenários económicos futuros constitui um elemento chave para a avaliação *market-consistent* das responsabilidades de seguros, especialmente para contratos com opções e garantias embutidas.

Segundo uma abordagem *market-consistent*, a calibragem dos modelos deve ser efectuada, na medida do possível, de forma consistente com a informação disponível, à data de avaliação, em mercados financeiros suficientemente líquidos, profundos e transparentes. Em particular, deve garantir-se a consistência com a estrutura temporal das taxas de juro sem risco utilizada no desconto dos *cash-flows* e as matrizes de volatilidade implícitas em instrumentos financeiros derivados, sobre as variáveis em causa, de forma a assegurar que os modelos reproduzem os preços de mercado de um determinado conjunto de instrumentos financeiros relevantes.

Em termos práticos, este exercício apresenta alguns desafios que importa realçar, designadamente a possibilidade da informação necessária para efeitos de calibragem não se encontrar disponível. Isto decorre, por exemplo, do facto de as responsabilidades de seguros terem uma natureza de médio e longo prazo, em geral superior à maturidade dos instrumentos derivados, tal como opções sobre acções ou índices accionistas, que são transaccionadas no mercado.

Um outro exemplo é o coeficiente de correlação entre classes de activos, que não é directamente observável através dos preços de mercado à data de avaliação. Uma possível alternativa passa pela assunção de pressupostos com base na relação histórica referente a um determinado período de tempo com extensão adequada.

Existem alguns testes que podem ser aplicados na determinação da adequação da calibragem efectuada, como por exemplo o Teste Martingala ' $1=1$ '. Este teste caracteriza-se pela propriedade de que, sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco, o valor actual esperado dos retornos de um dado activo, quando descontados à taxa de juro sem risco, iguala, o valor do activo à data de avaliação. Outros testes estatísticos podem ser aplicados para aferir a qualidade de ajustamento às taxas de referência, superfícies de volatilidade implícita ou correlações entre classes de activos.

As secções seguintes dedicam-se à apresentação de dois modelos, um para o risco de taxa de juro, o modelo Gaussiano de dois factores, doravante designado por G2++, e outro para o risco accionista, o modelo Heston-G2++. Estes modelos irão constituir a ferramenta de projecção de cenários futuros para a estrutura temporal das taxas de juro sem risco e para a rendibilidade de uma dada componente accionista, utilizados como referência para modelar a evolução dos fundos de investimento hipotéticos que serão propostos, a título exemplificativo, no Capítulo 5.

Para cada modelo será também efectuada uma descrição do processo de calibragem e dos esquemas de simulação necessários, com vista à realização de projecções. Realça-se ainda que o gerador de cenários apresentado neste trabalho é relativamente simples, sendo expectável que na prática se inclua um maior número de variáveis, tal como a inflação ou outras classes de activos onde os investimentos são geralmente efectuados.

4.1. Modelo Gaussiano de dois factores (G2++)

Antes de mais, considera-se útil introduzir alguns conceitos relativos à matéria das taxas de juro, necessários para a compreensão do modelo e do processo de projecção do preço de obrigações.

4.1.1. Conceitos gerais

Denote-se por $P(t, T)$ o preço, no instante t , de uma obrigação de cupão zero com maturidade em T e valor facial unitário. Considerando um regime de capitalização contínua pode definir-se diferentes tipos de taxas de juro em função de $P(t, T)$, conforme as seguintes expressões (Björk (2004)).

- Taxa *spot*:

$$R(T_1, T_2) = -\frac{\log[P(T_1, T_2)]}{(T_2 - T_1)}; \quad [4.1]$$

- Taxa *forward*, no momento t , correspondente a um empréstimo efectuado em T_1 com maturidade em T_2 :

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{\log[P(t, T_2)] - \log[P(t, T_1)]}{(T_2 - T_1)}; \quad [4.2]$$

- Pela expressão anterior, quando $T_2 - T_1 \rightarrow 0$, obtém-se a taxa instantânea de juro *forward*:

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log[P(t, T)]}{\partial T}; \quad [4.3]$$

- Taxa instantânea de juro ou taxa de juro de curto prazo (*i.e.*, *short rate*):

$$r(t) = f(t, t). \quad [4.4]$$

A taxa de juro de curto prazo num dado instante t é a taxa que se aplica a um período infinitesimal de tempo, não sendo directamente observável no mercado. Como tal, torna-se necessário recorrer a uma *proxy*.

O preço de uma obrigação de cupão zero num dado momento t pode, por sua vez, ser definido em função do comportamento da taxa de juro de curto prazo (ver [4.10]). Como tal, para além da simulação da evolução das taxas de juro de curto prazo num dado horizonte temporal, os modelos de taxa de juro de curto prazo permitem ainda a construção de estruturas temporais das taxas de juro (de cupão zero) que seriam observáveis em momentos de tempo futuros, com uma dada probabilidade.

Os modelos de taxa de juro de curto prazo podem ser classificados como modelos isentos de arbitragem, ou como modelos de equilíbrio. Os modelos isentos de arbitragem diferenciam-se dos de equilíbrio pelo facto de serem consistentes com a

estrutura temporal das taxas de juro à data de avaliação, constituindo esta última um *input* para a sua calibragem. Já os modelos de equilíbrio, que assentam em observações e pressupostos relativos à economia em geral, não pressupõem esse ajustamento automático, embora se possa conseguir uma boa aproximação através de uma escolha adequada dos parâmetros. Como tal, os preços das obrigações obtidos através de modelos de equilíbrio podem não ser consistentes com o preço das obrigações transaccionadas no mercado, dando lugar a oportunidades de arbitragem.

4.1.2. Especificação do modelo G2++

O modelo G2++ pertence à família dos modelos isentos de arbitragem e apresenta um conjunto de propriedades desejáveis, tais como a existência de fórmulas analíticas para a determinação do preço de obrigações ou derivados de taxas de juro. Por outro lado, por ser um modelo de dois factores, permite a modelação do declive da estrutura temporal das taxas de juro, enquanto os de um factor apenas permitem modelar choques paralelos nessa estrutura. Assim, os modelos de dois factores tendem a ser mais adequados para efectuar o *pricing* de derivados de taxas de juro, tais como *caps* e *swaptions*, atendendo à curvatura das estruturas de volatilidade implícita.

O modelo G2++, apresentado por exemplo em Brigo e Mercurio (2006), pode ser decomposto em três partes aditivas: duas que se comportam segundo um movimento Browniano geométrico e uma função determinística, definida de modo a que o modelo se ajuste exactamente à estrutura temporal das taxas de juro à data de avaliação.

A dinâmica da taxa de juro de curto prazo sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco é representada por

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t), \quad r(0) = r_0. \quad [4.5]$$

Os processos $\{x(t): t \geq 0\}$ e $\{y(t): t \geq 0\}$ satisfazem as equações

$$\begin{aligned} dx(t) &= -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), & x(0) &= 0 \\ dy(t) &= -by(t)dt + \eta dW_2(t), & y(0) &= 0 \end{aligned} \quad [4.6]$$

onde (W_1, W_2) é um movimento Browniano bi-dimensional com correlação instantânea ρ_{G2} , ou seja, $dW_1(t)dW_2(t) = \rho_{G2}dt$. Os parâmetros r_0, a, b, σ, η são constantes positivas e $\varphi(0) = r_0$.

Denota-se por F_t a sigma-álgebra gerada por (x, y) até ao instante t . A integração das equações [4.6], para $s < t$, resulta na expressão

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \varphi(t), \quad [4.7]$$

o que significa que $r(t)$, condicionado por F_s , segue uma distribuição Normal com média e variância dadas por

$$E[r(t)|F_s] = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \varphi(t) \quad [4.8]$$

e

$$V[r(t)|F_s] = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-s)}) + \frac{\eta^2}{2b} (1 - e^{-2b(t-s)}) + 2\rho_{G2} \frac{\sigma\eta}{a+b} (1 - e^{-(a+b)(t-s)}). \quad [4.9]$$

A principal desvantagem do modelo G2++ reside no facto de permitir que as taxas de juro de curto prazo simuladas apresentem valores negativos com probabilidade positiva, o que não é muito razoável de um ponto de vista económico. Esta limitação deriva do facto do modelo se encontrar assente na hipótese de que a taxa de juro de curto prazo segue uma distribuição Normal.

Tal como referido na secção 4.1.1., $P(t, T)$ pode ser definido em função da taxa de juro de curto prazo, através do seguinte valor esperado tomado sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco,

$$P(t, T) = E \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \middle| F_t \right]. \quad [4.10]$$

Para se conseguir determinar explicitamente o valor esperado pode usar-se o facto de, para (t, T) , a variável aleatória $I(t, T)$, definida por

$$I(t, T) = \int_t^T [x(u) + y(u)] du, \quad [4.11]$$

condicionada por F_t , seguir uma distribuição Normal com média $M(t, T)$ e variância $V(t, T)$, dadas por

$$M(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) + \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) \quad [4.12]$$

$$\begin{aligned} V(t, T) = & \frac{\sigma^2}{a^2} \left[(T-t) + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right] + \\ & + \frac{\eta^2}{b^2} \left[(T-t) + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right] + \\ & + 2\rho_{G2} \frac{\sigma\eta}{ab} \left[(T-t) + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right] \end{aligned} \quad [4.13]$$

O cálculo do preço de uma obrigação com base num modelo que pressupõe uma distribuição Normal para a taxa de juro traduz-se num simples cálculo do valor esperado de uma variável com distribuição Log-normal. Consequentemente,

$$P(t,T) = \exp \left[- \int_t^T \varphi(u) du - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{1}{2} V(t,T) \right]. \quad [4.14]$$

Para que o princípio de ausência de oportunidades de arbitragem se verifique, é necessário escolher a função $\varphi(t)$ de modo que $P(0,T)$ se ajuste exactamente aos factores de desconto calculados a partir da estrutura temporal das taxas de juro à data de avaliação. Designando por $R^M(0,T)$ as taxas *spot* observadas no mercado para a maturidade T , tem-se

$$P^M(0,T) = \exp \left[- R^M(0,T) \times T \right], \quad [4.15]$$

onde o índice superior M é utilizado para distinguir as variáveis que assumem valores de mercado.

De [4.6] e [4.14] decorre que

$$\begin{aligned} P^M(0,T) &= P(0,T) = \exp \left[- \int_0^T \varphi(u) du + \frac{1}{2} V(0,T) \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log \left[P^M(0,T) \right] = - \int_0^T \varphi(u) du + \frac{1}{2} V(0,T) \Leftrightarrow . \quad [4.16] \\ &\Leftrightarrow \int_0^T \varphi(u) du = - \log \left[P^M(0,T) \right] + \frac{1}{2} V(0,T) \end{aligned}$$

Atendendo a que

$$f^M(0, T) = -\frac{\partial \log[P^M(0, T)]}{\partial T} \quad [4.17]$$

e dado que [4.13] se pode escrever

$$\begin{aligned} V(t, T) = & \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^T [1 - e^{-a(T-u)}]^2 du + \\ & + \frac{\eta^2}{b^2} \int_t^T [1 - e^{-b(T-u)}]^2 du + \\ & + 2\rho_{G2} \frac{\sigma\eta}{ab} \int_t^T [1 - e^{-a(T-u)}][1 - e^{-b(T-u)}] du \end{aligned} \quad [4.18]$$

a derivada em ordem a T vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(0, T)}{\partial T} = & \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-aT})^2 + \\ & + \frac{\eta^2}{b^2} (1 - e^{-bT})^2 + \\ & + 2\rho_{G2} \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT}) \end{aligned} \quad [4.19]$$

Considerando [4.16], [4.17] e [4.19] tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T \varphi(u) du = \varphi(T) = \\ = f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bT})^2 + \\ + \rho_{G2} \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT}) \end{aligned} \quad [4.20]$$

A fórmula anterior é particularmente útil quando se pretende calcular o valor da taxa de juro de curto prazo para um dado instante t , como por exemplo para determinar o factor de desconto estocástico $\exp\left[\sum_i r_i \Delta t\right]$ por aproximação.

Atendendo ainda a que

$$\begin{aligned} \exp\left[-\int_t^T \phi(u)du\right] &= \exp\left[-\int_0^T \phi(u)du\right] \exp\left[\int_0^t \phi(u)du\right] = \\ &= \frac{P^M(0,T) \exp\left[-\frac{1}{2}V(0,T)\right]}{P^M(0,t) \exp\left[-\frac{1}{2}V(0,t)\right]} = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)} \exp\left[-\frac{1}{2}(V(0,T)-V(0,t))\right], \end{aligned} \quad [4.21]$$

pode escrever-se, por [4.14],

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \\ &= \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)} \exp\left[\frac{1}{2}(V(t,T)-V(0,T)+V(0,t)) - \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}x(t) - \frac{1-e^{-b(T-t)}}{b}y(t)\right]. \end{aligned} \quad [4.22]$$

A expressão [4.22] permite estimar a estrutura temporal das taxas de juro para um dado instante futuro t com relativa facilidade.

Por último, refira-se que segundo o modelo G2++ a função característica de $R(0,T)$, definido em [4.1], é dada por (Haastrecht (2007))

$$\varphi_{G2}(u) = \exp\left[iM(0,T)u - \frac{V(0,T)u^2}{2}\right]. \quad [4.23]$$

4.1.3. Calibragem do modelo G2++

Em linhas gerais, o processo de calibragem do modelo G2++ tem por objectivo determinar os parâmetros a , b , σ , η e ρ_{G2} através da minimização das diferenças entre os preços de um certo instrumento financeiro derivado produzidos pelo modelo e os respectivos preços de mercado.

A análise seguinte foca-se no caso em que a calibragem é efectuada em relação ao preço de *swaptions*, calculado pela fórmula de Black a partir das matrizes de volatilidade implícita observadas no mercado. Para tal, começa-se por apresentar uma breve descrição dos conceitos associados.

Um *swap* de taxa de juro consiste num contrato entre dois intervenientes de mercado que acordam trocar um conjunto de *cash-flows* fixos, determinados com base numa taxa fixa sobre o valor principal, e um conjunto de *cash-flows* variáveis, dependentes da evolução de uma dada taxa flutuante de referência, *e.g.*, Libor ou Euribor, aplicada sobre o mesmo valor principal.

Os contratos de *swap* designam-se por *payer interest rate swap* (PFS), se o detentor paga os *cash-flows* fixos em troca do recebimento de *cash-flows* variáveis, e por *receiver interest rate swap* (RFS), no caso contrário.

Seja $T = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}\}$ o conjunto dos momentos de ocorrência dos pagamentos, τ_i a fracção do ano entre T_{i-1} e T_i , N o valor principal, L a taxa flutuante e K a taxa fixa. Para o caso de um RFS, tem-se, seguindo a notação apresentada em Brigo e Mercurio (2006),

$$\begin{aligned}
 RFS(t, T, \tau, N, K) &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) (K - F(t; T_{i-1}, T_i)) = \\
 &= -NP(t, T_{\alpha}) + NP(t, T_{\beta}) + N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i K P(t, T_i)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde $F(t; T_{i-1}, T_i)$ é a taxa *forward*, que pode ser vista como uma estimativa do valor futuro da taxa *spot* $L(T_{i-1}, T_i)$.

No instante t , a taxa ao par ou *forward* de um contrato de *swap*, doravante representada por $S_{\alpha, \beta}(t)$, é o valor K tal que $RFS(t, T, \tau, N, K) = 0$. Logo,

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta})}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} = \frac{P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta})}{N_{\alpha+1, \beta}(t)}, \tag{4.25}$$

onde o denominador $N_{\alpha+1, \beta}(t)$ é designado por valor actual de um ponto base.

Por sua vez, uma *swaption* pode ser definida como uma opção que permite ao seu detentor entrar num contrato de *swap* de taxa de juro num determinado instante futuro. A título de exemplo, uma $T_{\alpha} \times (T_{\beta} - T_{\alpha})$ *payer swaption* Europeia, com preço de exercício K , é um contrato que à data de exercício da opção, em T_{α} , confere ao seu detentor o direito de entrar num contrato de *swap* com maturidade em T_{β} e taxa fixa igual a K . De acordo com a terminologia anglo-saxónica, o instante T_{α} corresponde ao *expiry* da opção, enquanto o período de tempo entre T_{α} e T_{β} é designado por *tenor* da *swaption*.

O preço de uma *swaption* pode ser determinado com recurso ao modelo de Black, também conhecido por Black-76, inicialmente apresentado por Fisher Black em 1976 como uma variante do modelo de Black-Scholes. Este modelo, que pode ainda ser utilizado na avaliação de opções sobre obrigações, *caps* e *floors*, caracteriza-se pelo facto de assumir que, na data de maturidade da opção, o valor do activo subjacente segue uma distribuição Log-normal.

A fórmula de Black-76 para uma $T_\alpha \times (T_\beta - T_\alpha)$ *payer swaption*, com preço de exercício K , é (Björk (2004))

$$PS_\alpha^\beta(t) = N_{\alpha+1}^\beta(t) \left(S_\alpha^\beta(t) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right), \quad [4.26]$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição da Normal estandardizada e

$$d_1 = \frac{1}{\sigma_{\alpha,\beta}^{black} \sqrt{T_\alpha - t}} \left(\log \left[\frac{S_\alpha^\beta(t)}{K} \right] + \frac{1}{2} (\sigma_{\alpha,\beta}^{black})^2 (T_\alpha - t) \right), \quad [4.27]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{\alpha,\beta}^{black} \sqrt{T_\alpha - t}, \quad [4.28]$$

sendo o parâmetro $\sigma_{\alpha,\beta}^{black}$ a volatilidade de Black, que geralmente se encontra nas matrizes de volatilidade implícita observadas no mercado.

O modelo G2++ apenas apresenta soluções exactas para determinados derivados de taxas de juro, tais como opções sobre obrigações de cupão zero, *caps* e *floors*. No caso das *swaptions*, torna-se necessário recorrer a outros métodos, entre os quais a simulação de Monte Carlo, que apresenta a desvantagem de ser muito exigente de um ponto de vista computacional.

Como possível alternativa, Schrager e Pelsser (2006) propuseram uma fórmula analítica aproximada, baseada na hipótese de que, no modelo de taxa de juro G2++, a taxa *swap* segue a distribuição Normal. A implementação prática deste método é relativamente simples, ainda que possa introduzir alguma margem de erro. Esta questão voltará a ser abordada no Capítulo 5.

De acordo com a fórmula de Schrager e Pelsser, o preço de uma *payer swaption* é dado por (Haastrecht (2007)),

$$PS_{\alpha}^{\beta}(0) = N_{\alpha+1,\beta}(0) \left[(S_{\alpha,\beta}(0) - K) \Phi \left(\frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\alpha,\beta}} \right) + \sigma_{\alpha,\beta} \varphi \left(\frac{K - S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}} \right) \right], \quad [4.29]$$

onde $S_{\alpha,\beta}(0)$ é definido em [4.25], $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição da Normal estandardizada e $\varphi(\cdot)$ a correspondente função densidade de probabilidade.

De forma análoga, para uma *receiver swaption* tem-se

$$RS_{\alpha}^{\beta}(0) = N_{\alpha+1,\beta}(0) \left[(K - S_{\alpha,\beta}(0)) \Phi \left(\frac{K - S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}} \right) + \sigma_{\alpha,\beta} \varphi \left(\frac{K - S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}} \right) \right]. \quad [4.30]$$

No caso particular das opções *at-the-money*, *i.e.*, quando o preço de exercício K é igual à taxa *swap* $S_{\alpha,\beta}(0)$, as fórmulas [4.29] e [4.30] simplificam-se, dando lugar à equação

$$PS_{\alpha}^{\beta}(0) = RS_{\alpha}^{\beta}(0) = N_{\alpha+1,\beta}(0) \frac{\sigma_{\alpha,\beta}}{\sqrt{2\pi}}, \quad [4.31]$$

onde $\sigma_{\alpha,\beta}$ é a raiz quadrada da variância integrada média das taxas *swap* $S_{\alpha,\beta}$ no intervalo $[0, T_{\alpha}]$, definida por

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha,\beta} &= \sqrt{\int_0^{T_\alpha} \left[(\sigma e^{at} C_{\alpha,\beta}^{(1)})^2 + (\eta e^{bt} C_{\alpha,\beta}^{(2)})^2 + 2\rho\sigma\eta C_{\alpha,\beta}^{(1)} C_{\alpha,\beta}^{(2)} e^{(a+b)t} \right] dt} = \\ &= \sqrt{\left(\sigma^2 (C_{\alpha,\beta}^{(1)})^2 \left[\frac{e^{2aT_\alpha} - 1}{2a} \right] + \eta^2 (C_{\alpha,\beta}^{(2)})^2 \left[\frac{e^{2bT_\alpha} - 1}{2b} \right] + 2\rho\sigma\eta C_{\alpha,\beta}^{(1)} C_{\alpha,\beta}^{(2)} \left[\frac{e^{(a+b)T_\alpha} - 1}{a+b} \right] \right)}, \quad [4.32]\end{aligned}$$

com

$$C_{\alpha,\beta}^{(1)} = \left[e^{-aT_\alpha} P^N(0, T_\alpha) - e^{-aT_\beta} P^N(0, T_\beta) - S_{\alpha,\beta}(0) \sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j e^{-aT_j} P^N(0, T_j) \right] / a, \quad [4.33]$$

$$C_{\alpha,\beta}^{(2)} = \left[e^{-bT_\alpha} P^N(0, T_\alpha) - e^{-bT_\beta} P^N(0, T_\beta) - S_{\alpha,\beta}(0) \sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j e^{-bT_j} P^N(0, T_j) \right] / b, \quad [4.34]$$

e

$$P^N(t, T_i) = \frac{P(t, T_i)}{N_{\alpha+1,\beta}(t)}. \quad [4.35]$$

4.2. Modelo Heston-G2++

4.2.1. Apresentação do modelo

Em Black e Scholes (1973) propôs-se a utilização do movimento Browniano geométrico para representar a evolução do preço de um dado activo, no contexto de avaliação de instrumentos financeiros derivados.

Não obstante o movimento Browniano geométrico ser um processo estocástico bastante popular, a assunção de pressupostos de taxa de juro e volatilidade constantes tem sido alvo de fortes críticas. Tal decorre do facto desses pressupostos não apresentarem uma sustentação empírica, em particular a longo prazo.

Com efeito, a consideração de que a taxa de juro de curto prazo se mantém aproximadamente constante poderá ser válida para intervalos de tempo muito pequenos. Contudo, quando se pretende efectuar projecções para horizontes temporais mais distantes, esse pressuposto torna-se pouco realista. Consequentemente, uma possível extensão para o modelo de Black-Scholes consiste em incluir um processo estocástico para modelar o comportamento dessa variável.

No que se refere à componente da volatilidade podem ser identificadas na teoria financeira pelo menos duas vertentes distintas relativas à sua modelação:

- os modelos de volatilidade local (abordagem determinística), onde a volatilidade é expressa em função do tempo e da evolução do activo subjacente. A vantagem deste modelo reside na possibilidade, pelo menos em teoria, de obter um ajustamento exacto a todos os preços ou volatilidades implícitas relevantes;
- os modelos de volatilidade estocástica, que consideram que a volatilidade do activo subjacente é uma variável aleatória, sendo a sua dinâmica ditada por um processo estocástico com a sua própria volatilidade – a denominada volatilidade da volatilidade – e com reversão para uma média de longo prazo.

De entre as duas abordagens apresentadas optou-se por explorar a segunda, tendo sido escolhido o modelo de Heston (1993), por ser um dos modelos de volatilidade estocástica mais conhecidos. Ao contrário do modelo de Black-Scholes, este modelo permite atender à não normalidade do logaritmo dos retornos do activo subjacente.

Sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco, o modelo de Heston pode ser especificado pelo sistema de equações (Moodley (2005)),

$$\begin{aligned} dS(t) &= rS(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_1(t) \\ dv(t) &= \kappa(\theta - v(t))dt + \xi\sqrt{v(t)}dW_2(t). \\ dW_1(t)dW_2(t) &= \rho_{HE}dt \end{aligned} \quad [4.36]$$

Os processos $\{S(t): t \geq 0\}$ e $\{v(t): t \geq 0\}$ descrevem, respectivamente, a evolução do preço e da volatilidade de um dado activo e (W_1, W_2) é um movimento Browniano bi-dimensional com correlação instantânea ρ_{HE} . O parâmetro r representa a taxa de juro sem risco e a volatilidade do preço do activo é dada por $\sqrt{v(t)}$, com $v(t)$ a seguir um processo de reversão para a média, convergindo para uma variância de longo prazo, θ , a uma velocidade de reversão κ . O parâmetro κ pode também ser interpretado como o nível de “*volatility clustering*”. A volatilidade da volatilidade é definida por ξ .

Uma das razões para a popularidade do modelo de Heston deve-se à existência de uma fórmula semi-analítica para efectuar o *pricing* de opções Europeias. A derivação da referida fórmula é efectuada em Heston (1993), pelo que se apresentam as expressões de cálculo do preço de uma opção *call* Europeia sobre um activo que não paga dividendos.

$$C(S, v, t, T, K) = SP_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2, \quad [4.37]$$

onde

$$x = \log[S], \quad [4.38]$$

e para $j = 1, 2$,

$$P_j(x, v, T, \log[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \log[K]} f_j(x, v, T; \phi)}{i\phi} \right) d\phi, \quad [4.39]$$

$$f_j(x, v, T; \phi) = \exp[C(T-t; \phi) + D(T-t; \phi)v + i\phi x], \quad [4.40]$$

$$C(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\xi^2} \left((b_j - \rho_{HE} \xi \phi i + d)\tau - 2 \log \left[\frac{1 - g e^{d\tau}}{1 - g} \right] \right), \quad [4.41]$$

$$D(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho_{HE} \xi \phi i + d}{\xi^2} \left(\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - g e^{d\tau}} \right), \quad [4.42]$$

$$g = \frac{b_j - \rho_{HE} \xi \phi i + d}{b_j - \rho_{HE} \xi \phi i - d}, \quad [4.43]$$

$$d = \sqrt{(\rho_{HE} \xi \phi i - b_j)^2 - \xi^2 (2u_j \phi i - \phi^2)}, \quad [4.44]$$

com

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad a = \kappa\theta, \quad b_1 = \kappa - \rho_{HE} \xi, \quad b_2 = \kappa. \quad [4.45]$$

Na prática, o integral que figura na expressão [4.39] pode ser determinado com base num método de integração numérica, como por exemplo, a regra de Gauss Lobatto, utilizando a função “quadl” do *software* Matlab.

A consideração de que tanto a taxa de juro como a volatilidade de um dado activo apresentam uma natureza estocástica dá lugar a uma nova família de modelos, que permitem ter em conta tanto o risco de taxa de juro como o risco accionista, sendo por isso conhecidos na literatura como modelos híbridos. A título de referência, em Haastrecht (2007) faz-se a caracterização de vários modelos híbridos, sendo dado

particular enfoque aos resultantes da combinação do modelo de taxa de juro G2++ com diferentes modelos para o risco accionista, incluindo o de Black-Scholes, de Merton e o de Heston.

Numa tentativa de implementar soluções mais realistas, que permitam reflectir a natureza estocástica dos factores de risco envolvidos, neste trabalho trata-se do modelo híbrido que combina o modelo G2++ com o modelo de volatilidade estocástica de Heston. A especificação deste modelo é idêntica a [4.36], com a excepção de que a taxa de juro r não é neste caso constante, mas tem de ser substituída pelo processo $r(t)$, dado por [4.5] e [4.6].

A calibragem de modelos com um elevado número de parâmetros, em especial quando tal é efectuado com base em preços ou volatilidades implícitas associados a instrumentos financeiros derivados, requer em geral a aplicação de rotinas de cálculo baseadas em métodos de integração numérica ou, quando estas não existam, em técnicas de simulação de Monte Carlo. Para além de poderem ter associados problemas de estabilidade dos resultados, estas rotinas, em particular no caso da simulação de Monte Carlo, são muito morosas e exigem grande capacidade computacional.

Como forma de contornar algumas destas limitações, apresenta-se em seguida um método rápido e eficaz para calcular o preço de opções financeiras, baseado na transformada rápida de Fourier. Como se verá adiante a aplicação desta fórmula teve por base o pressuposto de que o processo de taxa de juro $r(t)$ evolui de forma independente do preço e da volatilidade do activo subjacente. Assim, tem-se

$$dW_S(t)dW_v(t) = \rho_{HE} dt, \quad dW_S(t)dW_r(t) = 0 \quad \text{e} \quad dW_v(t)dW_r(t) = 0.$$

4.2.2. Avaliação de opções financeiras com base na transformada rápida de Fourier

Carr e Madan (1999) propuseram uma expressão para avaliar opções financeiras utilizando a função característica do modelo relevante e recorrendo à transformada rápida de Fourier, que consiste num algoritmo eficiente para calcular a transformada discreta de Fourier (Moodley (2005)),

$$w(k) = \sum_{j=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{N} (j-1)(k-1)} x(j). \quad [4.46]$$

A lógica inerente a esta técnica assenta no desenvolvimento de uma expressão analítica para a transformada de Fourier do preço de uma opção, obtido através da respectiva inversão. Deste modo, em primeiro lugar, é necessário expressar o preço de uma opção em termos da transformada rápida de Fourier.

Seja $C_T(k)$ o preço de uma opção *call* Europeia com maturidade em T e preço de exercício K . Denote-se por k o logaritmo do respectivo preço de exercício, *i.e.* $K = e^k$, e $x_T = \log[S_T]$.

O preço da opção *call* pode ser escrito como

$$C_T(k) = \int_k^\infty e^{-rT} (e^{x_T} - e^k) f_T(x_T) dx_T, \quad [4.47]$$

onde $f_T(x)$ designa a função de densidade de x , definida sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco.

Atendendo a que a transformada de Fourier e a sua inversa apenas são aplicáveis a funções de quadrado integrável, o que não é o caso de $C_T(k)$, não se considera directamente o preço da opção, mas antes uma variante do mesmo:

$$c_T(k) = e^{\alpha k} C_T(k), \quad [4.48]$$

com $\alpha > 0$.

De acordo com a especificação apresentada, é expectável que c_T seja uma função de quadrado integrável para um conjunto de valores α positivos e qualquer k real. No que se refere à escolha de α note-se que uma condição suficiente para que c_T seja uma função de quadrado integrável consiste em verificar que $F_{c_T}(0) < \infty$, o que é equivalente a ter-se

$$E[S_T^{\alpha+1}] < \infty. \quad [4.49]$$

Em Schoutens *et al.* (2003) é referido, com base num estudo empírico de calibragem do modelo de Heston à informação relativa ao índice Euro Stoxx 50, que um valor de $\alpha = 0,75$ é adequado para replicar os preços sob diferentes conjuntos de parâmetros.

A transformada de Fourier para $c_T(k)$ é definida por

$$F_{c_T}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\phi k} c_T(k) dk. \quad [4.50]$$

Demonstra-se que (Moodley (2005))

$$F_{C_T}(\phi) = \frac{e^{-rT} F_{C_T}(\phi - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \phi^2 + i(2\alpha + 1)\phi}. \quad [4.51]$$

O passo seguinte consiste na aplicação da inversa da transformada de Fourier, para se obter $C_T(k)$. Vem

$$\begin{aligned} C_T(k) &= e^{-\alpha k} c_T(k) = \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\phi k} F_{C_T}(\phi) d\phi = . \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-i\phi k} F_{C_T}(\phi) d\phi \end{aligned} \quad [4.52]$$

Em Carr e Madan (1999) mostra-se que

$$C_T(k_u) \approx \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} F_{C_T}(v_j) \frac{\eta}{3} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1}), \quad [4.53]$$

onde

$$v_j = \eta(j-1)$$

$$\eta = \frac{c}{N}$$

$$b = \frac{\pi}{\eta}$$

$$k_u = -b + \frac{2b}{N}(u-1), \quad u = 1, 2, \dots, N+1$$

Refira-se que, relativamente ao modelo de Heston, sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco, a função característica $F_{C_T}(\phi)$ pode ser especificada, segundo Hong (2004), da forma

$$F_{C_T}(\phi) = e^{A(\phi) + B(\phi) + C(\phi)}, \quad [4.54]$$

onde

$$A(\phi) = i\phi(x_0 + rT),$$

$$B(\phi) = \frac{2\zeta(\phi)(1 - e^{-\psi(\phi)T})v_0}{2\psi(\phi) - (\psi(\phi) - \gamma(\phi))(1 - e^{-\psi(\phi)T})},$$

$$C(\phi) = -\frac{\kappa\theta}{\xi^2} \left(2\log \left[\frac{2\psi(\phi) - (\psi(\phi) - \gamma(\phi))(1 - e^{-\psi(\phi)T})}{2\psi(\phi)} \right] + (\psi(\phi) - \gamma(\phi))T \right),$$

com

$$\zeta(\phi) = -\frac{1}{2}(\phi^2 + i\phi),$$

$$\psi(\phi) = \sqrt{\gamma(\phi)^2 - 2\xi^2\zeta(\phi)},$$

$$\gamma(\phi) = \kappa - \rho_{HE}\xi\phi i.$$

Nas opções *out-of-the-money*, Carr e Madan (1999) derivam uma expressão para a transformada rápida de Fourier baseada no valor temporal da opção,

$$C_T(k_u) \approx \frac{1}{\pi \sinh(\alpha k_u)} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \gamma_T(v_j) \frac{\eta}{3} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1}), \quad [4.55]$$

onde

$$\gamma_T(v) = \frac{\varphi_T(v - i\alpha) - \varphi_T(v + i\alpha)}{2},$$

$$\varphi_T(v) = e^{-rT} \left[\frac{1}{1 + iv} - \frac{e^{rT}}{iv} - \frac{F_{C_T}(v - i)}{v^2 - iv} \right].$$

Conforme referido em Haastrecht (2007), sob a hipótese de que os incrementos da taxa de juro e da rendibilidade do preço do activo subjacente apresentam uma correlação nula, em relação a muitos modelos híbridos, incluindo o modelo Heston-G2++, é possível efectuar o *pricing* de opções Europeias com base numa fórmula fechada, utilizando a transformada rápida de Fourier. A principal diferença reside na função característica, que é dada pelo produto entre a função característica do modelo para o risco accionista e a do modelo para o risco de taxa de juro. No entanto, para os casos em que a correlação é não nula, nem sempre existe uma fórmula analítica de cálculo, tendo de se recorrer a outros métodos, designadamente a simulação de Monte Carlo.

4.2.3. Esquemas de simulação

No contexto da simulação da componente da taxa de juro, refira-se que as soluções das equações [4.6], sob a medida *T-forward* ajustada ao risco, Q^T , são dadas por (Brigo e Mercurio (2006)),

$$\begin{aligned} x(t) &= x(s)e^{-a(t-s)} - M_x^T(s, t) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1^T(u) \\ y(t) &= y(s)e^{-b(t-s)} - M_y^T(s, t) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2^T(u), \end{aligned} \quad [4.56]$$

onde W_1^T e W_2^T são dois movimentos Brownianos correlacionados.

Adicionalmente, tem-se

$$M_x^T(s, t) = \left(\frac{\sigma^2}{a^2} + \rho_{G2} \frac{\sigma\eta}{ab} \right) (1 - e^{-a(t-s)}) - \frac{\sigma^2}{2a^2} [e^{-a(T-t)} - e^{-a(T+t-2s)}] - \frac{\rho_{G2}\sigma\eta}{b(a+b)} [e^{-b(T-t)} - e^{-bT-at+(a+b)s}] \quad [4.57]$$

e

$$M_y^T(s, t) = \left(\frac{\eta^2}{b^2} + \rho_{G2} \frac{\sigma\eta}{ab} \right) (1 - e^{-b(t-s)}) - \frac{\eta^2}{2b^2} [e^{-b(T-t)} - e^{-b(T+t-2s)}] - \frac{\rho_{G2}\sigma\eta}{a(a+b)} [e^{-a(T-t)} - e^{-aT-bt+(a+b)s}] \quad [4.58]$$

Dados os valores de $x(s)$ e $y(s)$, e considerando que $\Delta t = t - s$, pode utilizar-se as equações [4.56], [4.57] e [4.58] para gerar valores de $x(t)$ e $y(t)$ a partir da sua distribuição exacta, recorrendo à decomposição de Cholesky (Haastrecht (2007)),

$$\begin{aligned} x(t) &= x(s)e^{-a\Delta t} - M_x^T(s, t) + \sigma \sqrt{\frac{1}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t})} Z_1 \\ y(t) &= y(s)e^{-b\Delta t} - M_y^T(s, t) + \eta \sqrt{\frac{1}{2b}(1 - e^{-2b\Delta t})} [p_{G2} Z_1 + \sqrt{1 - p_{G2}^2} Z_2] \end{aligned} \quad [4.59]$$

onde Z_1 e Z_2 são observações da distribuição Normal estandardizada.

Atendendo ao objectivo de proceder à simulação de possíveis trajectórias para a evolução da cotação de um dado título ou índice accionista, para além da projecção da taxa de juro de curto prazo $r(t)$, convém determinar a taxa de juro integrada, que irá corresponder à deriva do processo assumido para o activo que se pretende modelar,

$$R(s, t) = \int_s^t r(u) du. \quad [4.60]$$

Relembra-se que, nos casos em que se considera uma taxa de juro de curto prazo constante, a deriva é dada por $r\Delta t$.

Tendo presente que $R(s, t)$ segue uma distribuição Normal, a simulação de valores para esta variável pode ser efectuada de forma conjunta com a dos processos $x(t)$ e $y(t)$. Para tal, começa-se por assumir o pressuposto de que, condicionado pelo momento s , o terno $(x(t), y(t), R(s, t))$ é conjuntamente Gaussiano, sendo possível simular as trajectórias de cada componente sem recorrer a uma discretização, mas a partir da sua distribuição Gaussiana exacta. Em primeiro lugar, é necessário determinar a correlação entre $r(t)$ e $R(s, t)$. Vem (Haastrecht (2007)),

$$\begin{aligned} Cov[r(t), R(s, t)] = & \frac{\sigma^2}{2a^2} [1 + e^{-2a\Delta t} - 2e^{-a\Delta t}] + \frac{\eta^2}{2b^2} [1 + e^{-2b\Delta t} - 2e^{-b\Delta t}] + \\ & + \rho_{G2} \frac{\sigma\eta}{ab} [1 - e^{-a\Delta t} - e^{-b\Delta t} + e^{-(a+b)\Delta t}] \end{aligned} \quad [4.61]$$

e

$$\rho_{rR} = \frac{Cov[r(t), R(s, t)]}{\sigma_r(s, t)\sigma_R(s, t)}. \quad [4.62]$$

Note-se que

$$\begin{aligned} \sigma_r^2(s, t) = & \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a\Delta t}] + \frac{\eta^2}{2b} [1 - e^{-2b\Delta t}] + 2\rho_{G2} \frac{\sigma\eta}{a+b} [1 - e^{-(a+b)\Delta t}], \\ = & \sigma_x^2(s, t) + \sigma_y^2(s, t) + 2\rho_{G2}\sigma_x(s, t)\sigma_y(s, t) \end{aligned} \quad [4.63]$$

com

$$\sigma_x(s, t) = \sigma \sqrt{\frac{1}{2a} (1 - e^{-2a\Delta t})},$$

$$\sigma_y(s, t) = \eta \sqrt{\frac{1}{2b} (1 - e^{-2b\Delta t})}.$$

Tendo presente os esquemas apresentados em [4.59], por aplicação da decomposição de Cholesky, o vector aleatório $(x(t), y(t), R(s, t))$ pode ser simulado de forma exacta a partir de

$$\begin{aligned} x(t) &= x(s)e^{-a\Delta t} - M_x^T(s, t) + \sigma \sqrt{\frac{1}{2a} (1 - e^{-2a\Delta t})} Z_1 \\ y(t) &= y(s)e^{-b\Delta t} - M_y^T(s, t) + \eta \sqrt{\frac{1}{2b} (1 - e^{-2b\Delta t})} [p_{G2} Z_1 + \sqrt{1 - p_{G2}^2} Z_2] \\ R(s, t) &= M(s, t) + \\ &+ \sigma_R(s, t) \left[\rho_{rR} \left(\frac{(\sigma_x(s, t) + p_{G2}\sigma_y(s, t))Z_1 + (\sigma_y(s, t)\sqrt{1 - p_{G2}^2})Z_2}{\sigma_r(s, t)} \right) + \sqrt{1 - \rho_{rR}^2} Z_3 \right] \end{aligned}, \quad [4.64]$$

onde Z_1 , Z_2 e Z_3 são observações da distribuição Normal estandardizada.

Para o modelo Heston-G2++, um possível algoritmo de simulação baseia-se no esquema proposto por Anderson (2007) para o modelo de Heston – denominado por “*Quadratic Exponential*” – adaptado à necessidade de atender ao comportamento estocástico das taxas de juro (Haastrecht (2007)). Refira-se que o algoritmo apresentado em seguida assenta na hipótese de que o coeficiente de correlação entre a taxa de juro e o retorno do activo modelado é nulo. Apesar de existirem fórmulas para o caso em que a correlação é não nula, não se explora esta possibilidade, já que para efeitos práticos do Capítulo 5 tal não se demonstra necessário.

Para um dado $\psi_c \in [1, 2]$ e valores de $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$, o algoritmo é composto pelas seguintes etapas:

- 1) Gerar duas observações independentes, Z_1 e Z_2 , da distribuição Normal estandardizada;
- 2) Dados $x(s)$ e $y(s)$, calcular $(x(t), y(t), R(s, t))$, conforme as fórmulas apresentadas em [4.64];

- 3) Dado $v(s)$, calcular m , s^2 e $\psi = \frac{s^2}{m^2}$, atendendo a que $m = \theta + (v(s) - \theta)e^{-\kappa \Delta t}$ e

$$s^2 = \frac{v(s)\xi^2 e^{-\kappa \Delta t}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa \Delta t}) + \frac{\theta \xi^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa \Delta t})^2;$$

- 4) Se $\psi \leq \psi_c$:

- a) Calcular

$$b^2 = 2\psi^{-1} - 1 + \sqrt{2\psi^{-1} - 1} \sqrt{2\psi^{-1} - 1} \geq 0$$

$$a = \frac{m}{1 + b^2}$$

- b) Gerar uma observação Z_v da distribuição Normal estandardizada

- c) Calcular $v(t) = a(b + Z_v)^2$

- 5) Se $\psi > \psi_c$:

- a) Calcular

$$\rho = \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \in [0, 1)$$

$$\beta = \frac{1 - \rho}{m} = \frac{2}{m(\psi + 1)} > 0$$

- b) Gerar uma observação U_v com distribuição Uniforme

- c) Calcular $v(t) = F^{-1}(U_v)$,

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq u \leq \rho \\ \beta^{-1} \log \left[\frac{1-\rho}{1-u} \right] & \text{se } \rho < u \leq 1 \end{cases}$$

6) Dado $\log[S(s)]$, calcular $\log[S(t)]$ através da expressão,

$$\begin{aligned} \log[S(t)] &= \log[S(s)] + \int_s^t r(u) du + \frac{\rho_{HE}}{\xi} (v(t) - v(s) - \kappa \theta \Delta t) + \\ &+ \Delta t \left(\frac{\kappa \rho_{HE}}{\xi} - \frac{1}{2} \right) (\gamma_1 v(s) + \gamma_2 v(t)) + \sqrt{\Delta t} \sqrt{1 - \rho_{HE}^2} \sqrt{\gamma_1 v(s) + \gamma_2 v(t)} \cdot Z_4 = , \\ &= \log[S(s)] + \int_s^t r(u) du + K_0 + K_1 v(s) + K_2 v(t) + \sqrt{K_3 v(s) + K_4 v(t)} \cdot Z_4 \end{aligned}$$

onde Z_4 é uma observação da distribuição Normal estandardizada e

$$K_0 = -\frac{\rho_{HE} \kappa \theta}{\xi} \Delta t ,$$

$$K_1 = \gamma_1 \Delta t \left(\frac{\kappa \rho_{HE}}{\xi} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\rho_{HE}}{\xi} ,$$

$$K_2 = \gamma_2 \Delta t \left(\frac{\kappa \rho_{HE}}{\xi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\rho_{HE}}{\xi} ,$$

$$K_3 = \gamma_1 \Delta t (1 - \rho_{HE}^2) ,$$

$$K_4 = \gamma_2 \Delta t (1 - \rho_{HE}^2) .$$

Note-se que, tomando o exponencial da expressão anterior, vai obter-se o preço do activo no instante t , $S(t)$. Contudo, a discretização faz com que a seguinte condição Martingala não seja verificada,

$$E \left[\exp \left[- \int_s^t r(u) du \right] S(t) \middle| S(s) \right] = S(s). \quad [4.65]$$

Para reforçar a condição de ausência de oportunidades de arbitragem, em Anderson (2007), propõe-se a substituição de K_0 por K_0^* , calculado pela expressão,

$$K_0^* = \begin{cases} -\frac{Ab^2a}{1-2Aa} + \frac{1}{2}\log[1-2Aa] - \left(K_1 + \frac{1}{2}K_3\right)v(s), & \text{se } \psi \leq \psi_c \\ -\log\left[\frac{\beta(1-\rho)}{\beta-A}\right] - \left(K_1 + \frac{1}{2}K_3\right)v(s), & \text{se } \psi > \psi_c \end{cases}, \quad [4.66]$$

onde $A = K_2 + \frac{1}{2}K_4$.

5. Aplicação

Neste capítulo procura ilustrar-se a aplicação da teoria e das metodologias expostas a um caso de estudo hipotético de avaliação de contratos de seguro com determinadas opções e garantias. Refira-se que todos os cálculos foram efectuados com recurso ao *software* Matlab 7.8.0 (R2009a) e ao Microsoft Excel.

Como ponto de partida, são apresentados os resultados da calibragem dos modelos G2++ e Heston-G2++. Estes modelos permitirão posteriormente efectuar a simulação da evolução dos fundos de investimento exemplificativos, que se supõe serem compostos por obrigações de cupão zero e títulos accionistas.

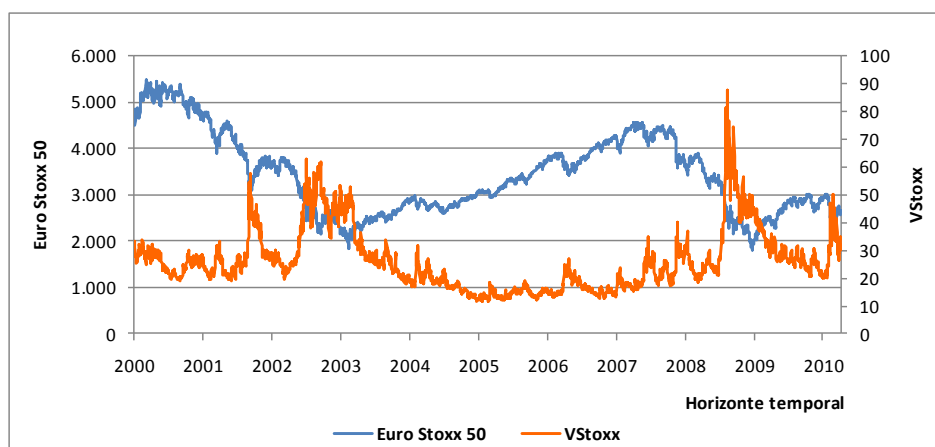
5.1. Resultados da calibragem dos modelos financeiros

A calibragem do modelo de taxa de juro G2++ é feita com base na informação relativa a taxas *swap* e volatilidades implícitas associadas a *swaptions*. Concluída esta etapa, torna-se possível determinar a evolução da taxa de juro sem risco a curto prazo, em diferentes cenários futuros. Estes resultados servem igualmente de *input* para a modelação da componente de acções, cujo comportamento é simulado através do modelo Heston-G2++. Quer isto significar que os parâmetros do modelo de taxa de juro são introduzidos como fixos no processo de calibragem do modelo Heston-G2++. Já os restantes parâmetros deste último modelo são calibrados com base nas volatilidades

implícitas associadas a opções sobre o índice Dow Jones Euro Stoxx 50. Salienta-se que a decomposição do exercício de calibragem em duas etapas é efectuada, por exemplo, em Grzelak *et al.* (2009).

No que se refere à escolha do referencial para a data de avaliação, é de realçar que se teve em atenção o clima de instabilidade sentido desde o início da recente crise nos mercados financeiros internacionais. Conforme se pode constatar pelo gráfico seguinte, o índice VStoxx – que reflecte as expectativas de mercado quanto à volatilidade do índice Euro Stoxx 50 – apresentou uma evolução preocupante a partir da segunda metade de 2007.

Gráfico 1: Evolução dos índices Euro Stoxx 50 e VStoxx



Quando se recorre a uma avaliação *market-consistent*, é natural que o valor das responsabilidades de uma empresa de seguros venha fortemente influenciado pelas condições de mercado à data de avaliação, em particular, no caso dos seguros de natureza mais financeira. É também de esperar que, em períodos de grande flutuação dos mercados financeiros, os cenários *market-consistent* apresentem níveis de

volatilidade superiores aos dos cenários reais. Por este motivo, a utilização da abordagem escolhida revela-se, em princípio, mais adequada a problemas de *pricing* ou de *hedging* dos riscos, do que, por exemplo, à gestão do capital económico a longo prazo.

De facto, níveis de volatilidade anormalmente elevados e um ambiente de baixas taxas de juro, como os verificados recentemente, conduzem inevitavelmente a um aumento expressivo do valor das responsabilidades, quando avaliadas numa perspectiva *market-consistent*. Como forma de atenuar esse efeito, em termos práticos poderia ponderar-se a inclusão de alguma informação histórica, no sentido de conferir uma maior estabilidade aos resultados. No entanto, os mesmos deixariam de ser puramente *market-consistent*.

Tendo presente que o enfoque do presente trabalho incide no estudo de metodologias que permitam efectuar uma calibragem dos modelos à informação reportada à data de avaliação, sendo os dados utilizados meramente exemplificativos, não se irá considerar outras fontes de informação.

Ainda assim, em reconhecimento dos efeitos que tais condições de mercado podem exercer sobre os resultados, julgou-se relevante assumir duas datas de avaliação distintas, designadamente 11-06-2007 e 21-06-2010, no intuito de efectuar uma comparação entre resultados obtidos em diferentes realidades dos mercados financeiros.

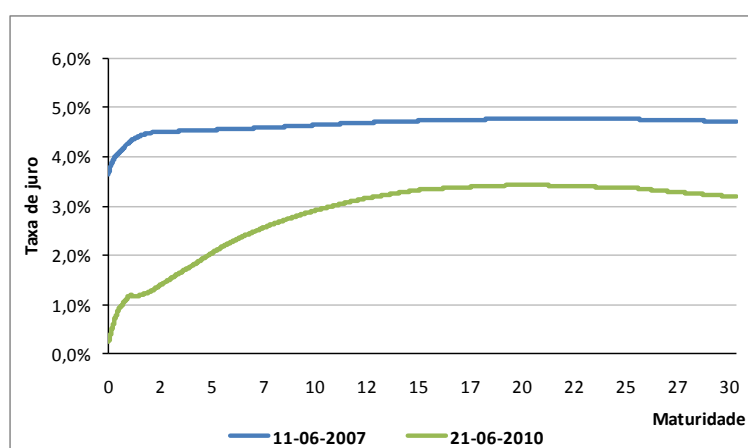
5.1.1. Modelo G2++

A estrutura temporal das taxas de juro sem risco foi derivada a partir da informação retirada da Bloomberg acerca das taxas *swap* face à Euribor a 6 meses, por aplicação de

um método de *bootstrap*⁴ e atendendo a que os pagamentos são efectuados anualmente. Não obstante a escolha de se utilizar taxas *swap* como *proxy* para a taxa de juro sem risco, importa realçar que estes instrumentos não se encontram totalmente isentos do risco de crédito. Deste modo, em linha com a proposta do CRO Forum, no seu documento de aconselhamento às especificações técnicas do quinto estudo de impacto quantitativo (QIS 5), em matéria de taxa de juro sem risco (CRO Forum (2010a)), efectuou-se um ajustamento de 10 pontos base para todas as maturidades, sobre as taxas *forward* derivadas a partir da curva das taxas *swap*, assumindo um regime de capitalização simples.

No gráfico seguinte ilustra-se as estruturas temporais das taxas de juro de cupão zero, resultantes do procedimento descrito, para cada uma das datas de avaliação em análise (os respectivos valores são apresentados no Quadro 5 do Anexo A).

Gráfico 2: Estrutura temporal das taxas de juro sem risco (Euro *Swap*)



⁴ Para maior detalhe, consultar Anexo TP1 das especificações técnicas do quarto estudo de impacto quantitativo (QIS 4).

Tal como referido nas recomendações adoptadas pelo *Board for Actuarial Standards*⁵, a introdução de um ajustamento nas taxas *swap* tem algumas implicações para o exercício de calibragem dos modelos financeiros que convém clarificar. Efectivamente, quando a estrutura temporal das taxas de juro considerada como *input* nos modelos difere da utilizada no *pricing* de instrumentos financeiros relevantes no mercado, deixa de ser possível assegurar o princípio de ausência de oportunidades de arbitragem.

Uma possível forma de contornar este problema consiste na recolha de informação acerca das volatilidades implícitas dos instrumentos financeiros relevantes, à data de avaliação, em vez dos seus preços de mercado, e recalcular o preço teórico que esses instrumentos teriam a partir de fórmulas fechadas, utilizando como *input* as volatilidades implícitas observadas e a estrutura temporal das taxas de juro considerada na avaliação. Note-se que deste modo o que se está a assegurar é a consistência dos resultados gerados pelos modelos financeiros com os preços teóricos calculados. Consequentemente, os resultados deixam de ser puramente *market-consistent*, uma vez que não replicam de forma exacta a informação observável no mercado à data de avaliação.

Para efeitos de calibragem do modelo de taxa de juro procedeu-se à recolha de informação acerca das volatilidades implícitas associadas a *swaptions at-the-money*, tendo-se calculado os respectivos preços por aplicação da fórmula de Black-76 (ver [4.26]). Para consulta dos resultados refira-se aos Quadros 6 a 9 do Anexo A.

O processo de calibragem consiste na obtenção de um conjunto de valores para os parâmetros do modelo G2++, que minimiza as diferenças entre os preços teóricos e os

⁵ Ver documento “GN47: *Stochastic Modelling of Economic Risks in Life Insurance V2.0.*” (Board for Actuarial Standards (2006)).

preços obtidos pelo modelo, neste caso considerando a fórmula de Schrager e Pelsser (ver [4.31]).

Como função objectivo do problema de optimização considerou-se a soma dos quadrados das diferenças relativas entre os preços teóricos e os preços obtidos pelo modelo, também utilizada em Brigo e Mercurio (2006),

$$\min \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{Preço modelo}_i - \text{Preço teórico}_i}{\text{Preço teórico}_i} \right)^2, \quad [5.1]$$

sendo N o número total de observações incluídas no exercício de calibragem.

Atendendo à potencial existência de vários mínimos locais, aplicou-se uma rotina de procura de mínimos globais, conhecida por “*Adaptive Simulated Annealing*”. Trata-se de uma rotina de optimização, escrita em linguagem C++, que pode ser implementada em Matlab por via da função “asamin”. Os detalhes de instalação e utilização desta função podem ser consultados em Moins (2002). Este método de optimização é geralmente utilizado na resolução de problemas de matemática aplicada, com o objectivo de obter uma boa aproximação a um mínimo global de uma dada função. É particularmente útil quando se tem um espaço de configurações muito grande.

Adicionalmente, tomando como solução inicial os valores obtidos para os parâmetros pela rotina mencionada, aplicou-se um algoritmo de optimização local, a função “lsqnonlin” do Matlab, baseada no método dos mínimos quadrados para problemas não lineares, de modo a refinar a qualidade da solução encontrada.

No quadro seguinte apresenta-se o resultado do exercício de calibragem do modelo G2++:

Quadro 1: Parâmetros do modelo G2++

	11-06-2007	21-06-2010
a	1,36243	0,02482
b	0,01984	0,02483
σ	0,00960	0,00070
η	0,00592	0,00866
ρ_{G2}	-0,47925	-0,89228

Para verificar a qualidade do ajustamento foram calculadas as diferenças relativas entre os preços derivados pelo modelo e os preços teóricos,

$$\frac{\text{Preço modelo} - \text{Preço teórico}}{\text{Preço teórico}}. \quad [5.2]$$

Os gráficos seguintes ilustram os valores resultantes, que podem ser consultados nos Quadros 14 e 15 do Anexo B.

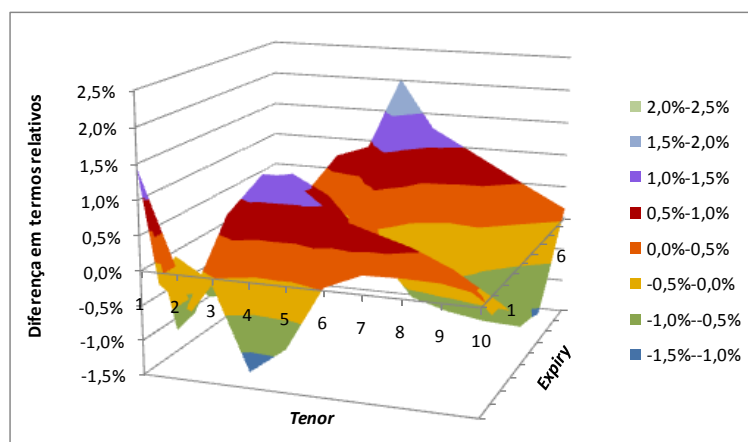
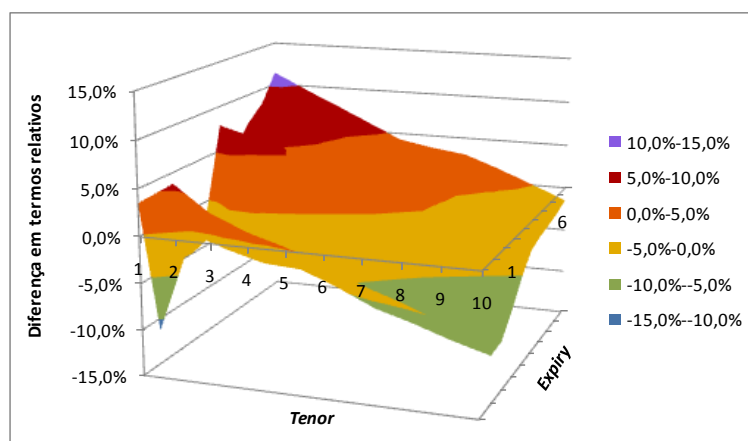
Gráfico 3: Erros de ajustamento (11-06-2007)

Gráfico 4: Erros de ajustamento (21-06-2010)

Por comparação dos gráficos anteriores é possível verificar que os erros de ajustamento são bastante superiores na data referente a meados de 2010, chegando a ultrapassar 10%, em valor absoluto, para certas observações. Chama-se a atenção que, a par da potencial limitação do modelo em reproduzir adequadamente o formado da matriz de preços referente a um contexto de elevada incerteza nos mercados financeiros, o facto de se ter utilizado uma fórmula aproximada para o cálculo do preço de *swaptions* poderá também ter exercido alguma influência na dimensão dos erros de ajustamento.

Sobre este último ponto, em Haastrecht (2007) é apresentada uma discussão acerca da qualidade de aproximação pela fórmula de Schrager e Pelsser, com base em resultados empíricos referentes a *swaptions at-the-money*. Chega-se à conclusão de que a qualidade tende a deteriorar-se em função do aumento do *expiry* e do *tenor* da *swaption* e do aumento da magnitude das volatilidades implícitas. No entanto, para o canto superior esquerdo da matriz de volatilidades implícitas (até cerca de 10 anos), é demonstrado que essa aproximação produz resultados satisfatórios em diferentes regimes de volatilidade. Ainda assim, é de notar que as condições de mercado à data de avaliação foram bastante mais adversas do que as previstas no estudo referido.

Já relativamente à primeira data de avaliação, os erros são geralmente inferiores a 1%, em valor absoluto, o que é bastante satisfatório e consistente com os resultados apresentados em outros estudos de referência, incluindo Brigo e Mercurio (2006) e Haastrecht (2007).

De forma a ver melhor qual seria o comportamento das taxas de juro de curto prazo sob cada um dos conjuntos de parâmetros encontrados, efectuou-se a simulação de 10.000 trajectórias de evolução das mesmas para um horizonte temporal de 10 anos e assumindo que a cada ano correspondem 360 dias. Os gráficos seguintes reflectem os quantis calculados sobre os resultados da simulação, tendo-se assumido como ponto inicial da simulação a taxa Euribor a 3 meses.

Gráfico 5: Evolução das taxas de juro de curto prazo (11-06-2007)

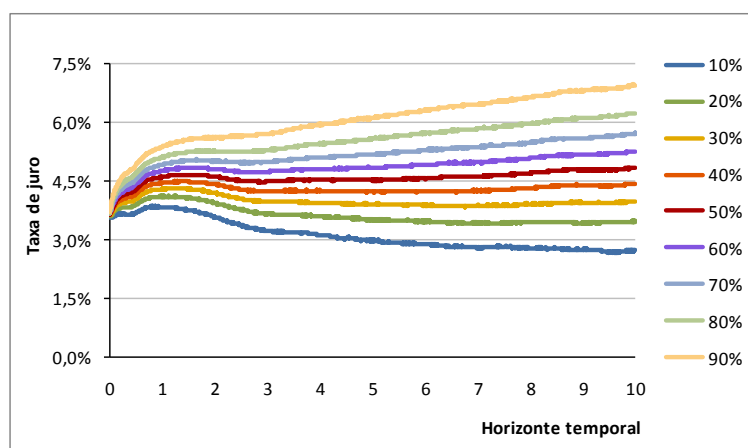
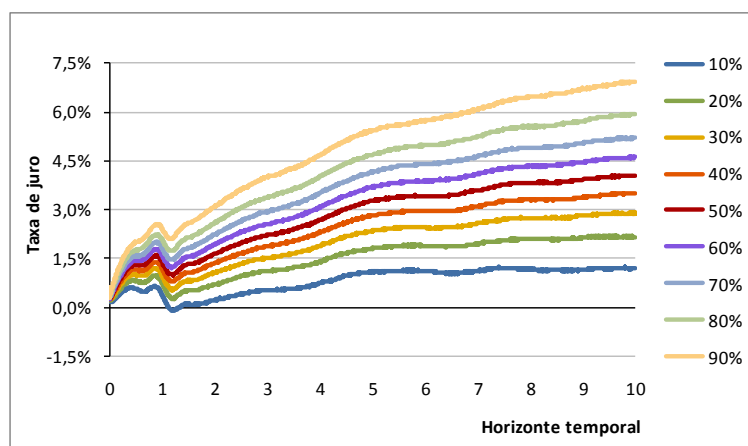


Gráfico 6: Evolução das taxas de juro de curto prazo (21-06-2010)

Um aspecto que importa realçar da observação gráfica é o de que, apesar do modelo G2++ permitir que as taxas de juro de curto prazo assumam valores negativos, para os parâmetros em causa esta desvantagem não aparenta ter grande impacto em termos práticos, pois os valores negativos só são atingidos em alguns cenários mais extremos.

5.1.2. Modelo Heston-G2++

Para efeitos do caso de estudo, o modelo de Heston-G2++ é utilizado na simulação do comportamento da componente de acções dos fundos de investimento exemplificativos. Dado que não se tem em vista a análise de nenhuma carteira específica de títulos, assumir-se-á que esta segue o comportamento de um índice accionista, o Dow Jones Euro Stoxx 50.

A escolha deste índice, que reflecte a capitalização bolsista das 50 principais empresas *blue ships* da Zona Euro, deveu-se essencialmente à disponibilidade e facilidade de obtenção de um grande manancial de informação relativa ao preço de instrumentos

financeiros derivados sobre o mesmo, bem como das respectivas volatilidades implícitas. Por outro lado, os contratos de opções sobre o Euro Stoxx 50 são um dos produtos da Eurex com maior volume de transacção.

Sem prejuízo da utilidade da informação referida, é de realçar que as opções sobre o Euro Stoxx 50, à semelhança das opções sobre o S&P 500 e o FTSE 100, têm subjacente o índice de preços, em vez do índice de rendibilidade total. Isto é uma limitação, pois o índice de preços não reflecte o pagamento de dividendos das acções que o compõem, enquanto o índice de rendibilidade total é ajustado por reinvestimento dos dividendos das empresas que estão incluídas no índice, de acordo com o seu peso, o que aumenta por consequência o seu valor.

Comparativamente às opções sobre o índice de preços, o *payoff* das opções sobre o índice de rendibilidade total é adicionado, no caso de uma *call*, e é reduzido, no caso de uma *put*, de qualquer dividendo atribuído ao activo subjacente durante o período de vigência da opção. Dado que a variável que se pretende projectar é a taxa de rendibilidade total, assumindo o reinvestimento dos dividendos, este facto coloca uma dificuldade adicional ao exercício de calibragem, que idealmente deveria basear-se nas volatilidades implícitas associadas a opções sobre o índice de rendibilidade total.

Como forma de contornar a inexistência de informação de mercado acerca destas últimas, considerar-se-á como *proxy* as volatilidades implícitas das opções sobre o índice dos preços. Esta hipótese é referida, por exemplo, pela empresa Barrie & Hibbert na introdução ao seu documento de investigação “*Using Equity Options In Market-Consistent Calibration*” (Morrison e Turnbull (2005)). De certa forma, a ideia subjacente é semelhante à descrita para a calibragem do modelo de taxa de juro, na sequência da necessidade de proceder a um ajustamento ao risco de crédito. Quer isto dizer que, na ausência da informação relativa ao preço de instrumentos financeiros, com

base no qual o modelo deveria ser calibrado, procurar-se-á, em alternativa, determinar o preço teórico que os mesmos teriam no mercado, fazendo uso da informação relativa a instrumentos com características o mais similares possível.

Atendendo a que, sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco, a rendibilidade total esperada de um activo é dada pela taxa de juro sem risco, o preço das opções *call* Europeias é determinado pela fórmula de Black-Scholes de acordo com (Hull (2005))

$$c = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2), \quad [5.3]$$

onde

$$d_1 = \frac{\log[S_0/K] + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

c é o preço da opção, S_0 o preço do activo no momento 0, K o preço de exercício, r a taxa de juro sem risco, σ o parâmetro da volatilidade, T a maturidade da opção e $\Phi(\cdot)$ representa a função de distribuição da Normal estandardizada.

Como pressuposto para a taxa de juro sem risco seguiu-se Hait (2001), no qual se refere que é prática comum no mercado fixar esse parâmetro igual à taxa de juro correspondente a obrigações de cupão zero com a mesma maturidade da opção que se pretende avaliar. Note-se que, se o objectivo fosse calcular o preço de uma opção sobre o índice de preços, teria de se deduzir os dividendos (possivelmente representados pela *dividend yield*) à taxa de juro sem risco r .

Os dados utilizados na calibragem são apresentados nos Quadros 10 a 13 do Anexo A. Estes consistiram em 66 observações para a data de 11-06-2007 e 68 para a data de 21-06-2010, considerando opções *call* Europeias, *in* e *out-of-the-money*, sobre o índice de preços Euro Stoxx 50, com maturidades sensivelmente entre 6 meses a 5 anos e meio.

A respeito do intervalo de maturidade das opções financeiras refira-se que uma outra limitação ao nível da informação decorre da natureza das responsabilidades de seguros do ramo Vida, que no geral têm associado um prazo superior aos dos instrumentos derivados transaccionados em mercados líquidos, profundos e transparentes.

Uma forma de ultrapassar o referido problema de falta de dados ou de falta de liquidez dos dados observados no mercado consistiria no estabelecimento de expectativas de longo prazo e no recurso a métodos de extrapolação das volatilidades implícitas, para os pontos em que não existe informação ou em que a informação existente não é líquida⁶.

Tendo presente que tal exercício requer um conhecimento profundo do funcionamento dos mercados financeiros e a análise de outras fontes de informação relevantes, no presente trabalho a calibragem restringe-se apenas à informação observada relativamente às opções sobre o índice Euro Stoxx 50, para as maturidades indicadas.

A calibragem do modelo de Heston-G2++ foi ainda precedida de uma análise da correlação histórica, a um ano, entre a taxa de juro de curto prazo e a rendibilidade do índice Euro Stoxx 50, com o objectivo de verificar a validade da hipótese $\rho_{HEG2} = 0$.

Como *proxy* para a taxa de juro de curto prazo considerou-se a Euribor a 3 meses. Para ambas as datas de avaliação, os coeficientes de correlação obtidos não demonstraram ser estatisticamente significativos, não excedendo os 5% em valor absoluto. Como tal,

⁶ No documento do CRO Forum “*Best Practice Paper – Extrapolation of Market Data*” (CRO Forum (2010b)) é apresentado um método de extrapolação, bem como os princípios que devem presidir a esse exercício para efeitos de uma avaliação *market-consistent*.

assumiu-se que $\rho_{HEG2} = 0$, o que simplifica bastante o processo de calibragem do modelo híbrido. Com efeito, sob esta hipótese poder-se-á recorrer à fórmula fechada baseada na aplicação da transformada rápida de Fourier (ver secção 4.2.2.) para efeitos de cálculo do preço das *opções call*, tendo subjacente o modelo Heston-G2++.

A implementação prática da fórmula fechada para o cálculo do preço de opções baseou-se no código, escrito em linguagem Matlab, disponibilizado por Moodley (2005) para o modelo de Heston, tendo sido necessário efectuar uma ligeira adaptação, de forma a incorporar a modelação das taxas de juro de forma estocástica.

O procedimento adoptado em termos de calibragem foi idêntico ao descrito no âmbito do modelo G2++, com excepção da função objectivo, tendo-se considerado a minimização do “*Mean Square Error*” (MSE),

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_i^N [(preço\ modelo_i - preço\ mercado_i)^2], \quad [5.4]$$

onde N é o número total de observações utilizadas na calibragem.

Tal como sugerido em Moodley (2005) introduziu-se a restrição $2\kappa\theta > \sigma^2$ no problema de optimização, como forma de evitar que a volatilidade assumia valores negativos. Tendo presente as ressalvas efectuadas, o exercício de optimização conduziu aos seguintes valores para os parâmetros do modelo (em adição aos já apresentados no Quadro 1):

Quadro 2: Parâmetros do modelo Heston-G2++

	11-06-2007	21-06-2010
κ	0,40356	0,36192
θ	0,05807	0,18379
ν_0	0,02526	0,05460
ξ	0,21649	0,36474
ρ_{HE}	-0,93457	-0,99999
MSE	46,30	88,52

Ao comparar a qualidade de ajustamento, medida pelo MSE, nota-se que se obtém resultados menos satisfatórios para a segunda data de avaliação, muito provavelmente pelo facto do modelo não ser robusto o suficiente para captar adequadamente a estrutura de preços num ambiente de condições de mercado mais voláteis.

Relativamente aos conjuntos de parâmetros é de salientar que κ apresenta uma ligeira redução, o que significa que no segundo caso a volatilidade tende a convergir mais lentamente para a sua média de longo prazo.

Tal como seria de esperar, os parâmetros que reflectem os níveis de volatilidade são mais elevados quando o modelo é calibrado a preços referentes a meados de 2010.

Tomando a raiz quadrada de ν_0 conclui-se que os valores obtidos para ambas as datas são próximos dos observados quanto ao índice VStoxx nessas mesmas datas (respectivamente, de 18,25% e 26,62%), o que de certa forma corrobora os resultados da calibragem relativamente a esse parâmetro.

Já no que se refere ao parâmetro θ , uma vez que se trata de um parâmetro de longo prazo, seria expectável que um modelo robusto permitisse flutuações ao nível do activo subjacente sem alterar significativamente os parâmetros de longo prazo. No entanto,

observa-se que este valor é fortemente influenciado pelas condições de mercado à data de avaliação.

A volatilidade da volatilidade, ζ , é também mais elevada na segunda data de avaliação, o que se traduz numa maior probabilidade para a ocorrência de movimentos extremos no mercado.

O parâmetro da correlação assume em ambas as datas valores bastante negativos, o que significa que a volatilidade tende a aumentar quando o preço ou o retorno do activo decresce, sendo coerente com a conhecida propriedade das séries financeiras, o designado “efeito de *leverage*”. Note-se que a obtenção de um valor próximo de -1 para a segunda data de avaliação sugere que a volatilidade pode ser modelada como uma função determinística, em vez de se recorrer a um processo estocástico.

Com o intuito de verificar o impacto que a consideração de taxas de juro estocásticas trouxe aos resultados da calibragem do modelo de taxa de juro G2++, efectuou-se a calibragem do modelo de Heston aos mesmos dados com base na rotina de integração numérica apresentada em 4.2.1., tendo-se obtido os seguintes resultados:

Quadro 3: Parâmetros do modelo de Heston

	11-06-2007	21-06-2010
κ	0,43713	0,30893
θ	0,05757	0,20139
ν_0	0,02477	0,05413
ξ	0,22208	0,35274
ρ_{HE}	-0,79414	-0,99999
MSE	8,13	69,60

O modelo de Heston permite obter melhores resultados em termos de qualidade do ajustamento, medida pelo MSE, conforme se pode concluir pela comparação dos valores apresentados nos Quadros 2 e 3. Esta constatação é semelhante aos resultados apresentados em Grzelak *et al.* (2009), onde se efectua a comparação dos resultados do modelo de Heston com os do modelo de Heston-Hull-White. Tal deve-se possivelmente ao facto de se estar a considerar taxas de juro determinísticas e iguais às utilizadas para o cálculo do preço das opções, o que se traduz na redução de uma fonte de incerteza.

Por outro lado, conclui-se que os parâmetros obtidos são bastante próximos dos apresentados para o modelo Heston-G2++, em relação a ambas as datas, não sendo os mesmos significativamente afectados pelo efeito da consideração de taxas de juro estocástica.

5.2. Caracterização dos fundos de investimento

Para efeitos exemplificativos considere-se que o valor do prémio único, líquido de eventuais encargos a cobrar ao tomador do seguro, é investido em uma das seguintes opções, consoante a preferência do tomador do seguro:

- **Fundo A** (perfil de risco agressivo): 25% em obrigações de elevada qualidade creditícia e 75% em acções;
- **Fundo B** (perfil de risco médio): 50% em obrigações de elevada qualidade creditícia e 50% em acções;
- **Fundo C** (perfil de risco conservador): 75% em obrigações de elevada qualidade creditícia e 25% em acções.

Por obrigações de elevada qualidade creditícia entenda-se títulos obrigacionistas emitidos por entidades com um risco de crédito negligenciável, de tal forma que o seu preço possa ser aproximadamente modelado com base na simulação da taxa de juro sem risco.

A proposta efectuada quanto à composição e peso atribuído a cada classe de activos baseou-se na observação de que, nos seguros ligados, e em particular no caso das anuidades variáveis, é frequente haver estratégias de investimento de natureza distinta, desenhadas de forma a ir de encontro aos diferentes perfis de risco dos tomadores de seguros. No entanto, importa referir que na prática os fundos tendem a ser compostos por mais classes de activos ou, dentro da mesma classe, por diferentes aplicações financeiras (*e.g.*, diferenciação geográfica, qualidade creditícia, ...), pelo que a consideração dos activos anteriormente descritos constitui uma simplificação da realidade, permitindo limitar a análise ao risco de taxa de juro e ao risco accionista.

Adicionalmente, assume-se como hipótese que o tomador do seguro não irá alterar a estratégia de investimento escolhida, apesar de tal ser muitas vezes permitido nos seguros desta natureza.

Tal como em Andreatta e Corradin (2003), considera-se razoável admitir que o valor dos fundos de investimento evolui de acordo com a expressão,

$$F(t) = pA(t) + (1 - p)G(t), 0 \leq p \leq 1, \quad [5.5]$$

onde p é a proporção investida numa componente accionista representada pelo índice Euro Stoxx 50, cujo valor é representado por $A(t)$, e $G(t)$ representa um índice obrigacionista. Este último é modelado considerando a acumulação de resultados segundo uma estratégia de compra e venda, com um horizonte de transacção fixo δ de obrigações de cupão zero com uma duração $D \geq \delta$.

Nos dois gráficos que se seguem ilustram-se alguns dos resultados, em termos de percentis, da simulação da evolução dos fundos de investimento, mais concretamente da evolução dos fundos com perfil de risco médio, para cada data de avaliação, de acordo com os respectivos conjuntos de parâmetros indicados nos Quadros 1 e 2, e assumindo que $\delta = 0,25$ e $D=5$.

Gráfico 7: Investimento de 50% em acções e 50% em obrigações (11-06-2007)

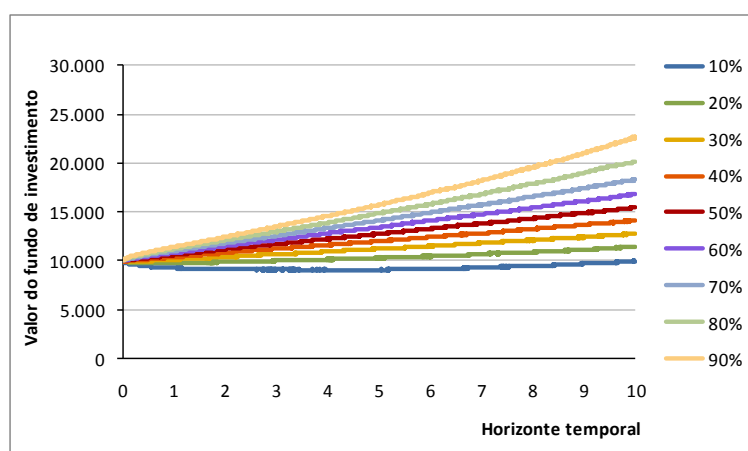
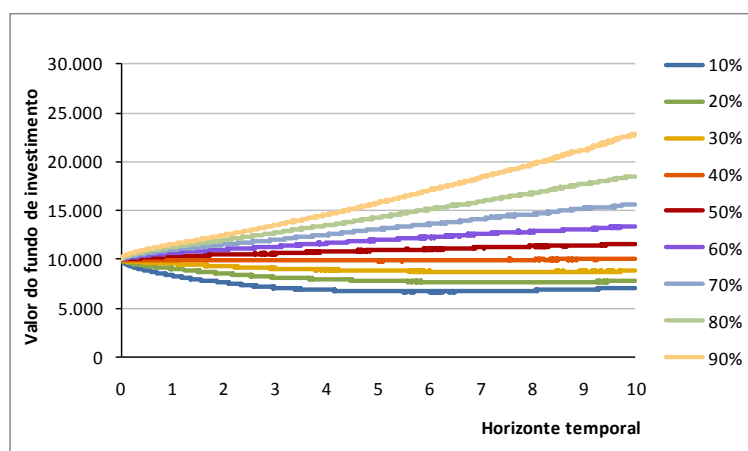


Gráfico 8: Investimento de 50% em acções e 50% em obrigações (21-06-2010)



No Anexo C exibem-se alguns outros gráficos que permitem comparar os resultados obtidos para fundos com diferentes perfis de risco, considerando os mesmos pressupostos relativamente a δ e D . Adicionalmente, no Anexo D apresentam-se alguns gráficos com o intuito de mostrar o efeito do pressuposto da duração das obrigações de cupão zero, D , na modelação do índice obrigacionista $G(t)$.

5.3. Caracterização dos contratos de seguro e apresentação dos resultados

Os resultados apresentados nesta secção referem-se a contratos de seguro exemplificativos, que se distinguem entre si pela composição do fundo de investimento subjacente e por outros pressupostos, relativos ao nível das garantias embutidas e ao tomador do seguro. Para cada um dos casos e data de avaliação apresenta-se separadamente os resultados relativos a cada tipo de cobertura, *i.e.*, garantia de um benefício mínimo à data de termo do contrato, garantia de um benefício mínimo em caso de morte e valor da opção de resgate. Tal segmentação permite identificar o peso de cada uma dessas componentes no valor total.

Importa também referir que a avaliação efectuada centra-se apenas no âmbito do cálculo da componente da melhor estimativa das provisões técnicas, estando a determinação da margem de risco excluída do presente trabalho.

Por princípio, a melhor estimativa deve incluir, em adição aos *cash-flows* directamente decorrentes da relação entre a empresa de seguros e os tomadores de seguros, um conjunto de despesas directas e indirectas resultantes da necessidade das empresas de

seguros assegurarem o integral cumprimento das suas responsabilidades. No entanto, dado que não se dispõe de informação acerca dessa componente e que, consequentemente, a sua modelação estaria apenas assente na assunção de pressupostos hipotéticos, optou-se por ignorar o impacto desses *cash-flows* nos resultados. Fica, contudo, a ressalva de que a rigor dever-se-ia efectuar a projecção dos referidos *cash-flows*, geralmente em função da evolução da taxa de inflação, e deduzir o respectivo valor actual à melhor estimativa das restantes componentes do contrato.

Em relação às hipóteses e pressupostos subjacentes ao caso prático suponha-se que, à data de avaliação, o contrato tem um prazo de 10 anos. Por simplificação, considere-se que a data de avaliação corresponde à data do seu início. Esta hipótese visa apenas evitar a necessidade de propor diferentes valores para o prémio inicialmente investido e o valor da conta corrente à data de avaliação.

Também como hipótese simplificativa assume-se que o tomador do seguro apenas pode resgatar o contrato nas datas aniversárias da apólice (no final de cada ano) e que os benefícios são pagos no final do ano.

Pressupondo que, à data de avaliação, o valor da conta corrente do tomador do seguro é igual a 10.000 unidades monetárias e que este montante irá capitalizar a uma taxa $g_A = 3\%$, à data de termo do contrato, o tomador do seguro teria direito a um benefício de, pelo menos, $10.000 \times (1 + 3\%)^{10}$.

No caso do tomador do seguro vir a falecer antes da data de termo do contrato estabelece-se, por hipótese, que os beneficiários irão receber pelo menos um benefício mínimo correspondente ao prémio inicial investido, *i.e.*, $g_D = 0\%$. As taxas de mortalidade e as probabilidades de sobrevivência são calculadas com base na tábua de

mortalidade TV88/90. Em caso de morte da pessoa segura, assume-se que tal ocorre no final do ano.

O valor de resgate no momento t é definido pela expressão,

$$VR_t = (1 - \beta_t) \max \{ CC_t; P(1 + g_s)^t \}, t = 1, \dots, T - 1, \quad [5.6]$$

onde β_t é o encargo de resgate aplicável no momento t e g_s é a taxa de capitalização utilizada no cálculo do benefício recebido pelo tomador de seguro em caso de resgate.

Como ponto de partida assume-se que $g_s = g_A = 3\%$ e que $\beta_t = 1\%$. O cálculo da melhor estimativa para um contrato com opção de resgate segue o algoritmo apresentado na secção 3.2.3., com a ressalva de que o desconto é feito com base nas taxas de juro simuladas a partir do modelo G2++, em vez da utilização de uma taxa fixa para todas as trajectórias e etapas da árvore de decisão.

Como função de regressão considerou-se os nove primeiros polinómios de Laguerre,

$L_n(x)$, obtidos recursivamente pela relação

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1} ((2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)), \quad k \geq 1, \quad [5.7]$$

dado $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$ e atendendo a que neste caso $x = CC_t$.

Esta consideração inspirou-se em Bacinello (2008), onde se propõe a utilização de polinómios de Laguerre como funções de base, tendo nesse estudo sido utilizado, no máximo, 13 polinómios. No presente trabalho, a utilização de um número inferior de termos deveu-se ao facto de, para o número de simulações considerado, não se ter verificado grande melhoria ao nível da precisão dos resultados.

No quadro seguinte apresenta-se os resultados calculados com base em 10.000 simulações. Para esse número de simulações constata-se que a variação entre os valores máximo e mínimo, em termos da melhor estimativa total, resultantes da realização de várias corridas para um mesmo conjunto de pressupostos, não tende a ser superior a 1%.

Convém ainda frisar que a assunção do pressuposto $\lambda = 1$ tem um carácter meramente exemplificativo. Conforme discutido na secção 3.2.3., a hipótese de que os tomadores de seguros agem de uma forma completamente racional não é a mais realista na prática, não se podendo em bom rigor chamar de melhor estimativa aos resultados. No entanto, tal permite obter uma ideia dos limites máximos, sendo subsequentemente efectuadas análises de sensibilidade sobre esse e outros parâmetros.

Quadro 4: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$,

$$g_A = 3\%, g_D = 0\%, g_S = 3\%, \alpha = 0\%, \beta = 1\%, \lambda = 1 \text{ e } x = 40$$

	11-06-2007			21-06-2010		
	Fundo A	Fundo B	Fundo C	Fundo A	Fundo B	Fundo C
GMAB^(a)	10.931,04	10.410,09	9.928,82	12.748,15	11.902,37	10.935,28
GMDB	190,88	185,96	183,18	208,26	197,38	186,77
Total s/opção resgate	11.121,92	10.596,06	10.111,99	12.956,41	12.099,75	11.122,05
Total c/opção resgate	11.303,66	10.770,78	10.246,61	13.029,80	12.153,47	11.206,40
Valor opção de resgate	181,74	174,72	134,61	73,39	53,72	84,35

(a) Inclui valor da conta corrente

Pelos resultados apresentados conclui-se, tal como seria de esperar, que a data de avaliação a que a melhor estimativa é calculada exerce um grande impacto sobre os respectivos valores, variando entre os 17% no caso do fundo de investimento com uma maior componente de acções (Fundo A) e os 10%, no caso oposto.

Efectivamente, quando a componente de acções tem maior peso, o valor da melhor estimativa vem superior em resultado dos retornos mais voláteis. Este comportamento deve-se ao facto do tomador do seguro ter direito a receber, na totalidade, os excessos acima dos níveis garantidos, enquanto a empresa de seguros tem de compensar as diferenças negativas. Como tal, a empresa perde mais quando os retornos vêm mais abaixo, do que quando estão acima das taxas garantidas. O valor da melhor estimativa tende assim a ser superior para carteiras mais voláteis, mesmo que em média os retornos sejam iguais.

A componente da garantia de um benefício mínimo em caso de morte não ultrapassa os 2% da melhor estimativa total e praticamente não é influenciado pelo perfil de risco dos fundos de investimento subjacentes. Contudo, é fortemente dependente da idade do tomador do seguro, como se pode constatar através de uma análise de sensibilidade a essa variável. A título de exemplo, se em vez de 40 anos de idade se considerar 20 ou 60 anos, verifica-se que esta garantia representa, respectivamente, cerca de 0,5% e 8% do valor total da melhor estimativa (ver Quadros 18 e 19 do Anexo E).

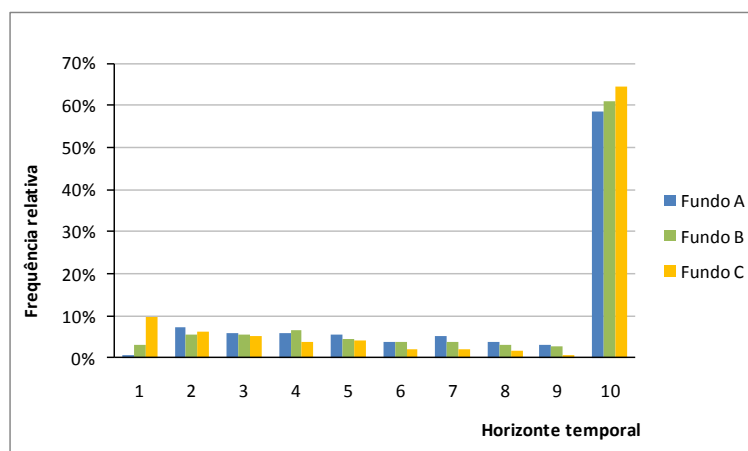
Já o valor da opção de resgate exhibe uma maior dependência ao contexto de mercado a que os cálculos se referem, situando-se o seu peso em torno de 1,5% na primeira data de avaliação e 0,5% na segunda. Adicionalmente, tendem também a variar mais em função da composição do fundo de investimento subjacente. Salienta-se que a interpretação desses resultados tem de atender ao efeito conjunto do nível das taxas de juro e da volatilidade, pelo que a observação dos gráficos apresentados no Anexo C poderá ser útil para melhor visualizar o comportamento dos fundos de investimento subjacentes. Da análise dos resultados relativos à opção de resgate aparenta ser possível identificar dois tipos de tendências.

Por um lado, quanto menor o nível das taxas de juro, menor é o valor da opção de resgate. Teoricamente, este padrão poderia ser justificado pelo facto de que nesse contexto a existência de garantias (em caso de vida e de morte) representa uma mais valia para o tomador do seguro apenas, já que a empresa tem de compensar o diferencial entre o valor da conta corrente e o nível das garantias, pelo que a frequência de exercício da opção é menor. Note-se que em caso de resgate também são concedidas garantias, no entanto as garantias à data de maturidade e em caso de morte aparentam exercer um maior efeito na decisão do tomador do seguro.

Por outro lado, para cada data de avaliação verifica-se de uma forma geral que, quanto mais agressiva a estratégia de investimento, maior o valor da opção de resgate. Atendendo à condição [5.6], estes resultados decorrem, muito provavelmente, do facto de que, para um mesmo contexto de mercado, o valor da conta corrente está a atingir certos picos que tornam o valor de resgate nesse momento superior ao valor residual do contrato, tornando-se mais vantajoso exercer a opção.

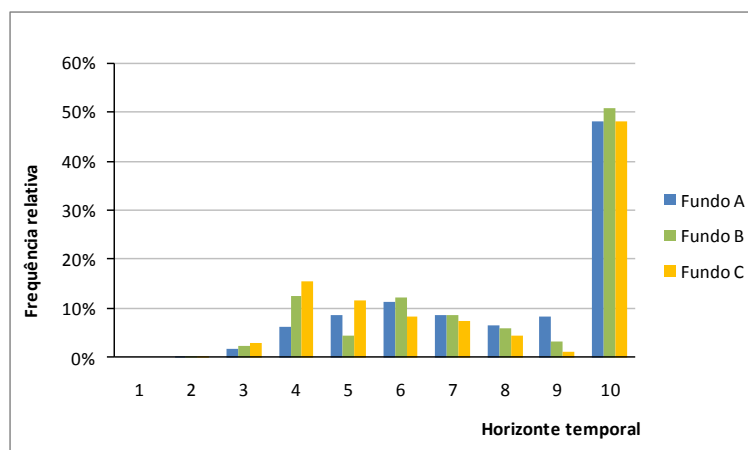
Para se ter uma ideia dos momentos óptimos de exercício ao longo do horizonte de projecção apresenta-se em seguida dois gráficos, um para cada data de avaliação, onde se ilustra a respectiva frequência relativa para os diferentes fundos de investimento, ao longo do horizonte de projecção. Note-se que os valores referentes a $T=10$ correspondem ao caso em que a opção não é exercida, sendo apenas incluídos nos gráficos para efeitos comparativos.

Gráfico 9: Frequência relativa de exercício da opção de resgate em cada ano de projecção (11-06-2007)



Para esta data de avaliação conclui-se, como referido anteriormente, que quanto mais agressiva a estratégia de investimento, menor a probabilidade do contrato de seguro permanecer em vigor até ao seu termo. Enquanto para o Fundo A em cerca de 42% dos casos é óptimo exercer a opção antes data de termo do contrato, no Fundo C essa percentagem representa aproximadamente 36%.

Gráfico 10: Frequência relativa de exercício da opção de resgate em cada ano de projecção (21-06-2010)



Da análise gráfica não é possível estabelecer, nesta data, uma relação tão clara entre a frequência relativa de exercício da opção de resgate e a composição dos fundos de investimento. De facto, em aproximadamente 52% dos casos é óptimo exercer a opção antes da data de termo do contrato, quer se considere o Fundo A, quer se considere o Fundo C.

Relativamente aos restantes pressupostos, constata-se por exemplo que a redução da taxa garantida em caso de resgate, mais precisamente assumindo o pressuposto de que esta é igual a 0% (ver Quadro 20 do Anexo E), desincentiva substancialmente o exercício dessa opção. Face aos valores de base registam-se decréscimos no valor da opção de resgate que rondam os 75% a 90%, em função da data e perfil de risco do fundo de investimento subjacente.

O aumento de um ponto percentual ao nível do encargo de resgate β (ver Quadro 21 do Anexo E), leva a uma redução, grosso modo, em torno de 25% em todos os exemplos referentes a 11-06-2007 e entre os 40% e 80%, na outra data.

Por último, um incremento mesmo que ligeiro do valor do parâmetro λ , por exemplo de 1 para 1,1 (ver Quadro 22 do Anexo E), também conduz a um efeito de redução significativo do valor da opção de resgate, acima dos 80%, concluindo-se que os resultados são muito sensíveis a variações nesse parâmetro. Apesar de neste trabalho não se proceder à respectiva calibragem, destaca-se que tal exercício terá inerente um vasto conjunto de dificuldades práticas relacionadas essencialmente com a disponibilidade de informação, às quais se acresce esta aparente sensibilidade dos resultados aos pressupostos assumidos.

6. Conclusão

O presente trabalho teve como objectivo formular um modelo de avaliação de contratos de seguros ligados a fundos de investimento com determinadas opções e garantias, assente num conjunto de metodologias actuariais e financeiras, consistentes e articuladas entre si.

Parte do trabalho de formulação do modelo focou-se na construção de uma ferramenta com o objectivo de efectuar a projecção de cenários económicos futuros, neutros face ao risco, para o risco de taxa de juro e para o risco accionista. Com base na simulação de possíveis trajectórias de evolução do valor de fundos de investimento compostos pelas classes de activos referidas, procurou-se determinar, para diferentes pressupostos, o correspondente valor da melhor estimativa de contratos de seguro com garantias financeiras à data de maturidade, em caso de morte da pessoa segura e em caso de resgate.

O estudo de metodologias aplicáveis ao *pricing* de instrumentos financeiros derivados revelou ser um aspecto fundamental para a concretização do objectivo proposto. Com efeito, o recurso a tais metodologias foi necessário tanto para a calibragem dos modelos utilizados na geração de cenários económicos futuros, como para o cálculo da melhor estimativa. No âmbito do processo de calibragem procurou-se utilizar exclusivamente metodologias analíticas desenvolvidas para os modelos financeiros considerados, em virtude da necessidade de efectuar o cálculo do preço de um elevado número de opções financeiras com relativa rapidez. Já no que se refere à determinação do valor das opções

e garantias mostrou-se ser mais adequado, senão mesmo inevitável, a aplicação de técnicas baseadas na simulação de Monte Carlo.

A exposição teórica dos princípios e metodologias de avaliação foi complementada pela implementação prática do modelo formulado, considerando um caso de estudo hipotético, construído com base em algumas das características geralmente embutidas nos seguros ligados com garantias financeiras, em particular, nas anuidades variáveis.

Da comparação dos resultados referentes às duas datas de avaliação consideradas – meados de 2007 e de 2010 –, que reflectem diferentes contextos de nível das taxas de juro e de volatilidade, concluiu-se, tal como seria de esperar, que a aplicação de uma abordagem *market-consistent* leva a que o valor das opções e garantias seja fortemente dependente das condições de mercado à data de avaliação.

Com efeito, face aos valores dos parâmetros dos modelos G2++ e Heston-G2++, utilizados respectivamente na modelação do risco de taxa de juro e do risco accionista, as diferenças em termos de resultados finais para cada data de avaliação traduziram-se, consoante a composição do fundo de investimento, em cerca de 10% a 17%.

O peso da garantia em caso de morte revelou ser bastante sensível à idade do tomador do seguro, podendo variar entre 0,5% e 8%, para o conjunto de idades testado.

Sob as especificações contratuais, hipóteses e parâmetros considerados, os resultados para o cenário base e restantes análises de sensibilidade evidenciaram que o valor da opção de resgate não tende a ultrapassar 2% do valor da melhor estimativa. Por outro lado, constatou-se que ligeiras alterações nos parâmetros relevantes podem levar a que o valor da opção Americana convirja rapidamente para o valor de uma opção Europeia.

Relativamente ao processo de calibragem dos modelos financeiros refira-se que, a par das diferenças nos valores estimados para os parâmetros, a própria qualidade do

ajustamento foi claramente afectada pelo ambiente de mercado no qual os dados observados se encontravam inseridos.

No caso particular da calibragem do modelo de taxa de juro G2++, é de notar que a utilização de uma aproximação analítica para calcular o preço de *swaptions* pode ter tido alguma influência na magnitude das diferenças relativas entre os preços calculados pelo modelo e os preços calculados a partir dos dados de mercado. Neste sentido, seria relevante confirmar esta suposição, repetindo o mesmo exercício de optimização, mas recorrendo a uma outra fórmula para o cálculo do preço de *swaptions*, como por exemplo a proposta em Brigo e Mercurio (2006).

Também ao nível do modelo para o risco accionista se poderia ponderar a hipótese de utilizar outros modelos, designadamente, modelos baseados em processos estocásticos que incluam uma componente de salto, a fim de verificar se tais alternativas permitiriam obter resultados mais satisfatórios em períodos de grande incerteza nos mercados.

Ainda assim, e sem prejuízo de possíveis margens de erro que possam advir da potencial falta de robustez das metodologias adoptadas, de um modo geral é possível concluir que, no quadro da aplicação de uma abordagem *market-consistent*, dificilmente se conseguirá alcançar a mesma qualidade de ajustamento em situações de “stress”, como em condições “normais” de mercado. Este é certamente um dos aspectos a ter em atenção na avaliação das responsabilidades de seguros, mais concretamente na escolha dos *inputs* para o processo de calibragem dos modelos financeiros ou da própria abordagem a aplicar em tais situações.

Por outro lado, são de realçar as limitações ao nível da disponibilidade de informação, em mercados líquidos, profundos e transparentes, relativa aos instrumentos derivados cujo preço ou volatilidade implícita poderiam ser utilizados no processo de calibragem

dos modelos. Consequentemente, foi necessário assumir algumas hipóteses simplificativas e *proxies*, reconhecendo-se contudo que na prática estas situações de falta de informação devem ser analisadas com grande cuidado e complementadas com informação de outras fontes relevantes, inclusivamente, o uso de opinião perita.

Uma outra limitação a apontar, numa esfera mais metodológica, deriva da utilização de uma metodologia de calibragem do modelo de Heston-G2++ que apenas é aplicável aos casos em que a correlação entre as taxas de juro de curto prazo e o activo subjacente é nula. Segundo a mesma, a função característica do modelo Heston-G2++ é dada pelo produto das funções características do modelo G2++ e do modelo de Heston. No entanto, considerando que na projecção de cenários é importante atender a eventuais correlações entre diferentes classes de activos, seria relevante que o cálculo do preço de opções financeiras, considerando um modelo híbrido para a modelação do activo subjacente, permitisse contemplar um pressuposto de correlação diferente de zero. À partida, a técnica da simulação de Monte Carlo permitiria ter em atenção esse aspecto. No entanto, a morosidade e exigência computacional torna o exercício de calibragem quase impraticável. A solução terá assim de passar, ou pela combinação da simulação de Monte Carlo com outras técnicas que permitam reduzir o tempo de processamento dos cálculos, nomeadamente técnicas de redução da variância, ou pela utilização de fórmulas analíticas. A título de exemplo, os trabalhos de Haastrecht *et al.* (2009) e Grzelak *et al.* (2009) apresentam algumas propostas neste sentido, mas para outros modelos híbridos que não o de Heston-G2++.

A extensão do âmbito do gerador de cenários económicos a outras variáveis económico-financeiras é também um aspecto a melhorar, já que apenas se teve em atenção dois tipos de risco. De entre as classes de activos que importaria contemplar no exercício de projecção destacam-se os títulos de dívida sujeitos a risco de crédito, tais como as

obrigações empresariais, uma vez que na prática uma parte significativa dos investimentos tende a ser efectuada nessa classe de activos.

Uma outra variável a incluir no modelo é a taxa de inflação, em particular no que se refere à projecção dos *cash-flows* das despesas. Neste âmbito, importa referir que os cenários de inflação devem ser gerados de uma forma integrada com os restantes riscos e que o modelo utilizado para a respectiva projecção deve idealmente ser calibrado de uma forma consistente com as expectativas de mercado à data de avaliação, em detrimento do uso de informação histórica.

Por último, remete-se igualmente para trabalho futuro a extensão do modelo formulado a outras opções e garantias. De facto, atendendo à multiplicidade de especificações contratuais, convém reter a ideia de que as coberturas analisadas no presente trabalho constituem apenas um conjunto particular, de um vasto leque de possibilidades de estudo. Entre estes destaca-se a opção de resgate parcial, a possibilidade de inclusão de prémios regulares e a exploração de coberturas de natureza vitalícia, dando maior enfoque ao risco de longevidade.

De certa forma, todas essas coberturas têm já sido objecto de estudo de alguns trabalhos ao longo dos últimos anos, como referido ao longo do texto. No entanto, os mesmos tendem a centrar-se em aspectos específicos ou têm subjacentes processos de modelação dos activos subjacentes relativamente simples, tal como o movimento Browniano geométrico. Assim, pode dizer-se que o principal contributo deste trabalho consiste na apresentação de uma perspectiva mais global e integrada, dando tanta importância ao processo de calibragem e projecção do valor dos activos subjacentes, como à avaliação de opções contratuais e garantias financeiras, propriamente dita.

Bibliografia

Andersen, L. (2007). Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model. Working Paper.

Andreatta, G. e Corradin, S. (2003). Valuing the Surrender Options Embedded in a Portfolio of Italian Life Guaranteed Participating Policies: a Least Squares Monte Carlo Approach. Working Paper.

Bacinello, A. R. (2003). Pricing Guaranteed Life Insurance Participating Policies with Annual Premiums and Surrender Option. *North American Actuarial Journal*. **7** (3).

Bacinello, A. R. (2008). A Full Monte Carlo Approach to the Valuation of the Surrender Option Embedded in Life Insurance Contracts. Working Paper, Università degli Studi di Trieste.

Ballotta, L., Esposito, G. e Haberman, S. (2006). Modelling the Fair Value of Annuities Contracts: the Impact of Interest Rate Risk and Mortality Risk. Actuarial Research Paper, Number 176, City University London.

Bauer, D., Kling, A. e Russ, J. (2006). A Universal Pricing Framework for Guaranteed Minimum Benefits in Variable Annuities. Working Paper, Ulm University.

Bernard, C. e Lemieux, C. (2008). Fast Simulation of Equity-linked Life Insurance Contracts with a Surrender Option. *Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference*. 444-452, IEEE Press.

- Björk, T. (2004). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Second Edition, Oxford University Press.
- Black, F. e Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*. **81 (3)**: 637-654.
- Board for Actuarial Standards. (2006). GN47: Stochastic Modelling of Economic Risks in Life Insurance V2.0.
- Brigo, D. e Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models – Theory and Practice, With Smile, Inflation and Credit*. Second Edition, Springer Finance.
- Carr, P. e Madan, D. B. (1999). Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*. **2(4)**: 61–73.
- Chen, Z., Vetzal, K. e Forsyth, P. A. (2008). The Effect of Modelling Parameters on the Value of GMWB Guarantees. *Insurance: Mathematics and Economics*. **43 (1)**: 165-173.
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (2008). QIS4 – Technical Specifications.
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (2010). QIS5 – Technical Specifications.
- CRO Forum (2010a). QIS5 Technical Specifications – Risk Free Interest Rates.
- CRO Forum (2010b). Best Practice Paper – Extrapolation of Market Data.
- Directiva 2009/138/CE do Parlamento Europeu e do Conselho, de 25 de Novembro de 2009, relativa ao acesso à actividade de seguros e resseguros e ao seu exercício (Solvência II).
- Foroughi, K. (2010). Market-Consistent Valuations and the Implications of the Recent Financial Crisis. Towers Watson.

- Furrer, H. (2010). Valuation of the Surrender Option in Life Insurance Policies. ETH, Zürich.
- Grzelak, L. A., Oosterlee, C. W. e Weeren, S. V. (2009). Extension of Stochastic Volatility Equity Models with Hull-White Interest Rate Process. Working Paper.
- Haastrecht, A. (2007). *Hybrid equity-interest rate models*. Master Thesis, Vrije Universiteit Amsterdam.
- Haastrecht, A. e Pelsser, A. A. J. (2010). Efficient, Almost Exact Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. **13 (1)**: 1-43.
- Haastrecht, A., Lord, R., Pelsser, A. A. J. e Schrager, D. (2009). Pricing Long-Maturity Equity and FX Derivatives with Stochastic Interest Rates and Stochastic Volatility. *Insurance: Mathematics and Economics*. **45 (3)**.
- Hait, D. (2001). Dividend Forecasts, Option Pricing Models, and Implied Volatility Calculations: Why simpler is better. OptionMetrics.
- Heston, S. L. (1993). A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options. *The Review of Financial Studies*. **6 (2)**: 327–343.
- Hong, G. (2004). Forward Smile and Derivative Pricing. Cambridge.
- Hull, J. (2005). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Sixth Edition, Prentice Hall.
- Instituto de Seguros de Portugal (2010). Documento de Discussão sobre o Cálculo das Provisões Técnicas com base em Princípios Económicos.
- Junker, L. e Ramezani, S. (2010). Variables Annuities in Europe after the Crisis: Blockbuster or Niche Product?. McKinsey Working Papers on Risk, Number 19.

Kienitz, J. e Kammeyer, H. (2009). An Implementation of the Hybrid-Heston-Hull-White Model. Deutsche Postbank AG.

Longstaff, F. e Schwartz, E. (2001). Valuing American Options by Simulation: a Simple Least-Squares Approach. *The Review of Financial Studies*. **14 (1)**: 113-147.

Milevsky, M. e Posner, S. (2001). The Titanic Option: Valuation of the Guaranteed Minimum Death Benefit in Variable Annuities and Mutual Funds. *The Journal of Risk and Insurance*. **68 (1)**: 93-128.

Milevsky, M. e Salisbury, T. S. (2002). The Real Option to Lapse and the Valuation of Death-Protected Investments. Working Paper, York University and the Fields Institute, Toronto.

Milevsky, M. e Salisbury, T. S. (2006). Financial Valuation of Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits. *Insurance: Mathematics and Economics*. **38 (1)**: 21-38.

Moins, S. (2002). Implementation of a Simulated Annealing Algorithm for Matlab. Technical Report, Linköping Institute of Technology.

Moodley, N. (2005). *The Heston Model: A Practical Approach with Matlab Code*. An Honours Project, University of the Witwatersrand.

Morrison, S. e Turnbull, C. (2005). Using Equity Options in Market-Consistent Calibration. Barrie & Hibbert.

Peng, J., Leung, K. S. e Kwok, Y. K. (2009). Pricing Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits under Stochastic Interest Rates. Working Paper, Hong Kong University of Science and Technology.

Schoutens, W., Simons, E. e Tistaert, J. (2003). A Perfect Calibration! Now What?. UCS Technical Report, Catholic University Leuven.

Schrager, D. e Pelsser, A. A. J. (2006). Pricing Swaptions and Coupon Bond Options in Affine Term Structure Models. *Mathematical Finance*. **16 (4)**: 673-694.

ANEXOS

Anexo A - Dados utilizados na calibragem dos modelos financeiros

Quadro 5: Estrutura temporal das taxas de juro

Maturidade	Taxas <i>swap</i> ^(a)		Taxas de cupão zero ^(b)	
	11-06-2007	21-06-2010	11-06-2007	21-06-2010
1	4,49%	1,29%	4,30%	1,18%
2	4,69%	1,39%	4,49%	1,28%
3	4,72%	1,65%	4,52%	1,54%
4	4,74%	1,90%	4,54%	1,80%
5	4,75%	2,16%	4,55%	2,07%
6	4,77%	2,40%	4,57%	2,31%
7	4,78%	2,58%	4,58%	2,49%
8	4,80%	2,74%	4,60%	2,66%
9	4,82%	2,87%	4,63%	2,80%
10	4,84%	2,98%	4,65%	2,93%
11	4,86%	3,08%	4,67%	3,03%
12	4,88%	3,17%	4,69%	3,13%
13	-	-	4,71%	3,21%
14	-	-	4,72%	3,28%
15	4,91%	3,35%	4,73%	3,34%
16	-	-	4,74%	3,36%
17	-	-	4,75%	3,39%
18	-	-	4,76%	3,40%
19	-	-	4,77%	3,42%
20	4,95%	3,45%	4,77%	3,44%
21	-	-	4,77%	3,42%
22	-	-	4,77%	3,41%
23	-	-	4,77%	3,40%
24	-	-	4,77%	3,38%
25	4,95%	3,43%	4,76%	3,37%
26	-	-	4,75%	3,33%
27	-	-	4,74%	3,29%
28	-	-	4,74%	3,26%
29	-	-	4,73%	3,22%
30	4,93%	3,32%	4,72%	3,19%

(a) Fonte: Bloomberg

(b) Taxas após ajustamento para remover o risco de crédito

Quadro 6: Volatilidades implícitas associadas a *swaptions* (11-06-2007)

		<i>Tenor</i>									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Expiry</i>	1	11,25%	11,55%	11,60%	11,80%	11,75%	11,60%	11,50%	11,40%	11,30%	11,20%
	2	11,90%	11,95%	11,80%	11,70%	11,65%	11,60%	11,50%	11,40%	11,30%	11,25%
	3	12,00%	12,00%	11,85%	11,70%	11,65%	11,55%	11,45%	11,35%	11,25%	11,15%
	4	12,05%	12,00%	11,75%	11,60%	11,50%	11,45%	11,35%	11,25%	11,15%	11,05%
	5	12,00%	11,90%	11,70%	11,55%	11,40%	11,30%	11,25%	11,15%	11,05%	10,95%
	6	11,79%	11,69%	11,49%	11,37%	11,21%	11,14%	11,07%	10,97%	10,90%	10,82%
	7	11,65%	11,50%	11,30%	11,20%	11,05%	11,00%	10,90%	10,80%	10,75%	10,70%
	8	11,44%	11,30%	11,11%	11,02%	10,84%	10,81%	10,74%	10,64%	10,59%	10,54%
	9	11,26%	11,10%	10,94%	10,83%	10,64%	10,64%	10,57%	10,49%	10,44%	10,39%
	10	11,05%	10,90%	10,75%	10,65%	10,45%	10,45%	10,40%	10,35%	10,30%	10,25%

Fonte: Bloomberg

Quadro 7: Volatilidades implícitas associadas a *swaptions* (21-06-2010)

	Tenor										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Expiry	1	56,30%	43,20%	37,70%	33,10%	29,90%	28,00%	26,60%	25,50%	24,70%	24,00%
	2	43,30%	33,90%	30,30%	27,80%	26,10%	25,00%	24,30%	23,60%	23,10%	22,60%
	3	32,30%	27,10%	25,30%	24,10%	23,10%	22,60%	22,10%	21,70%	21,30%	21,10%
	4	26,00%	23,30%	22,30%	21,50%	21,00%	20,60%	20,20%	19,90%	19,70%	19,60%
	5	22,20%	20,80%	20,20%	19,70%	19,30%	19,00%	18,80%	18,60%	18,50%	18,40%
	6	19,53%	18,98%	18,61%	18,31%	18,03%	17,82%	17,77%	17,74%	17,67%	17,74%
	7	18,70%	18,10%	17,80%	17,60%	17,30%	17,20%	17,20%	17,30%	17,30%	17,40%
	8	17,73%	17,26%	17,07%	16,94%	16,84%	16,80%	16,81%	17,01%	17,08%	17,21%
	9	16,78%	16,49%	16,39%	16,41%	16,40%	16,43%	16,54%	16,74%	16,88%	17,04%
	10	15,90%	15,70%	15,80%	15,90%	16,00%	16,20%	16,30%	16,50%	16,70%	16,90%

Fonte: Bloomberg

Quadro 8: Preços de *swaptions* calculados pela fórmula de Black-76 (11-06-2007)

	<i>Tenor</i>									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	19,64	38,99	57,27	75,93	92,56	107,47	121,95	135,67	148,52	160,62
2	27,43	53,90	78,21	101,41	123,82	145,24	165,07	183,65	201,18	218,41
3	32,40	63,50	92,28	119,20	145,68	170,34	193,48	215,33	235,61	254,53
4	36,04	70,45	101,53	131,26	159,90	187,61	213,14	236,85	259,01	279,58
5	38,61	75,12	108,82	140,84	170,62	199,34	227,06	252,15	275,47	297,12
6	39,95	77,84	112,91	146,24	177,02	206,92	235,09	260,77	285,41	308,10
7	41,13	79,92	115,57	149,95	181,15	211,94	239,85	265,79	291,13	314,97
8	41,79	80,84	117,02	151,45	182,28	213,38	241,90	267,76	293,14	317,01
9	41,79	80,94	117,02	151,11	181,46	212,85	241,06	267,22	292,46	316,19
10	41,68	80,21	115,99	149,69	179,40	210,23	238,45	265,00	289,97	313,44

Quadro 9: Preços de *swaptions* calculados pela fórmula de Black-76 (21-06-2010)

	<i>Tenor</i>									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	29,87	57,21	86,06	113,54	139,61	165,11	190,46	214,21	237,81	259,77
2	48,06	83,51	123,68	162,08	197,41	233,67	269,66	302,80	335,39	366,02
3	53,10	98,20	145,72	189,86	232,37	275,71	316,45	355,53	392,65	429,46
4	59,12	110,39	160,12	208,45	255,45	300,94	343,23	385,19	424,94	464,40
5	60,96	113,86	167,29	217,48	265,78	312,20	358,56	400,76	442,49	481,99
6	58,26	114,94	168,86	220,86	269,99	318,37	365,55	410,98	453,38	493,45
7	61,95	118,91	174,34	227,67	277,79	326,43	374,60	423,22	463,53	505,20
8	61,63	119,45	175,42	230,51	281,69	331,30	379,75	426,51	469,16	512,39
9	61,23	118,83	175,98	230,44	282,31	332,80	378,61	425,62	470,40	514,91
10	59,58	117,25	173,02	227,22	279,90	328,34	373,94	420,94	467,37	513,23

Quadro 10: Volatilidades implícitas associadas a opções sobre o índice Euro Stoxx 50
(11-06-2007)

maturidade	21-Dec-07	19-Dec-08	18-Dec-09	17-Dec-10	16-Dec-11	21-Dec-12
T	0,53	1,52	2,52	3,52	4,51	5,53
r	4,10%	4,43%	4,51%	4,53%	4,54%	4,56%
3900	20,58%	20,38%	20,81%	21,42%	21,96%	22,47%
4000	19,88%	19,95%	20,48%	21,14%	21,73%	22,27%
4100	19,17%	19,51%	20,14%	20,86%	21,49%	22,07%
4200	18,44%	19,07%	19,80%	20,59%	21,26%	21,87%
4300	17,69%	18,63%	19,47%	20,32%	21,03%	21,67%
4400	16,96%	18,19%	19,14%	20,05%	20,81%	21,48%
4500	16,23%	17,77%	18,83%	19,79%	20,59%	21,29%
4600	15,55%	17,37%	18,52%	19,54%	20,37%	21,11%
4700	14,93%	16,98%	18,22%	19,30%	20,17%	20,93%
4800	14,41%	16,61%	17,94%	19,06%	19,97%	20,75%
4900	13,99%	16,27%	17,66%	18,84%	19,78%	20,59%

Fonte: Haastrecht (2007)

Quadro 11: Volatilidades implícitas associadas a opções sobre o índice Euro Stoxx 50
(21-06-2010)

maturidade	17-12-2010	17-06-2011	16-12-2011	15-06-2012	21-12-2012	20-12-2013	19-12-2014	18-12-2015
T	0,50	1,00	1,51	2,01	2,54	3,55	4,56	5,57
r	0,91%	1,18%	1,19%	1,28%	1,41%	1,68%	1,95%	2,21%
2450	30,10%	29,89%	29,78%	30,58%	30,73%	-	-	-
2500	29,22%	29,14%	29,28%	29,97%	30,20%	31,45%	32,75%	-
2550	28,44%	28,40%	28,52%	29,38%	29,67%	-	-	-
2600	27,44%	27,62%	27,95%	28,87%	29,23%	30,37%	31,84%	-
2650	26,57%	26,91%	27,45%	28,27%	28,72%	-	-	-
2700	25,75%	26,21%	26,74%	27,72%	28,22%	29,44%	30,95%	32,00%
2750	24,93%	25,53%	26,17%	27,15%	27,75%	-	-	-
2800	24,04%	24,85%	25,61%	26,65%	27,11%	28,56%	30,09%	31,14%
2850	23,23%	24,20%	25,07%	26,20%	26,64%	-	-	-
2900	22,44%	23,52%	24,63%	25,55%	26,06%	27,66%	29,32%	30,40%
2950	21,73%	22,92%	24,05%	25,07%	25,81%	-	-	-

Fonte: Bloomberg

Quadro 12: Preços de opções sobre o índice Euro Stoxx 50 calculados pela fórmula de Black-Scholes (11-06-2007)

maturidade	21-Dec-07	19-Dec-08	18-Dec-09	17-Dec-10	16-Dec-11	21-Dec-12
T	0,53	1,52	2,52	3,52	4,51	5,53
r	4,10%	4,43%	4,51%	4,53%	4,54%	4,56%
3900	652,47	898,84	1112,05	1304,90	1482,14	1649,51
4000	568,93	824,63	1043,19	1240,28	1421,60	1592,52
4100	488,63	752,46	975,76	1176,95	1361,87	1536,43
4200	412,09	682,67	910,03	1115,18	1303,48	1481,25
4300	339,96	615,45	846,31	1054,80	1246,21	1426,99
4400	273,47	550,98	784,48	995,83	1190,36	1373,97
4500	213,25	489,89	725,11	938,61	1135,68	1321,91
4600	160,72	432,41	667,83	883,19	1082,18	1271,15
4700	116,60	378,53	612,97	829,64	1030,54	1221,38
4800	81,55	328,63	560,89	777,71	980,15	1172,61
4900	55,04	283,07	511,14	728,05	931,37	1125,56

Quadro 13: Preços de opções sobre o índice Euro Stoxx 50 calculados pela fórmula de Black-Scholes (21-06-2010)

maturidade	17-12-2010	17-06-2011	16-12-2011	15-06-2012	21-12-2012	20-12-2013	19-12-2014	18-12-2015
T	0,50	1,00	1,51	2,01	2,54	3,55	4,56	5,57
r	0,91%	1,18%	1,19%	1,28%	1,41%	1,68%	1,95%	2,21%
2450	422,57	512,43	583,24	658,13	723,60	-	-	-
2500	383,51	475,38	549,43	623,51	690,27	824,88	955,98	-
2550	346,22	439,21	513,11	589,58	657,48	-	-	-
2600	308,71	403,53	479,87	557,33	626,46	759,97	895,76	-
2650	273,47	369,48	448,26	524,45	594,91	-	-	-
2700	240,14	336,66	414,69	492,99	563,98	699,16	836,89	963,06
2750	208,60	305,04	383,85	461,80	534,06	-	-	-
2800	178,26	274,71	353,94	432,31	501,83	640,97	779,51	906,68
2850	150,57	245,95	325,44	404,37	473,25	-	-	-
2900	125,21	218,19	299,05	374,18	443,22	583,65	725,02	853,34
2950	102,73	192,72	271,98	347,28	419,51	-	-	-

Anexo B – Resultados da calibragem dos modelos financeiros

Quadro 14: Diferenças relativas entre os preços teóricos das *swaptions* e os preços do modelo (11-06-2007)

		<i>Tenor</i>									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Expiry</i>	1	1,44%	-0,79%	-0,09%	-1,27%	-0,88%	0,04%	0,26%	0,28%	0,27%	0,17%
	2	-0,35%	-0,72%	0,76%	1,37%	1,24%	0,85%	0,69%	0,53%	0,31%	-0,26%
	3	-0,08%	-0,39%	0,55%	1,24%	0,79%	0,55%	0,33%	0,04%	-0,13%	-0,27%
	4	-0,55%	-0,79%	0,73%	1,15%	0,88%	0,20%	-0,13%	-0,32%	-0,47%	-0,56%
	5	-1,00%	-0,92%	-0,08%	0,08%	0,29%	-0,04%	-0,66%	-0,82%	-0,90%	-0,93%
	6	-0,31%	-0,51%	0,08%	0,08%	0,29%	-0,12%	-0,52%	-0,58%	-0,86%	-0,97%
	7	-0,75%	-0,76%	0,05%	-0,20%	0,17%	-0,36%	-0,38%	-0,36%	-0,72%	-1,07%
	8	-1,03%	-0,68%	-0,05%	-0,09%	0,63%	0,02%	-0,19%	-0,06%	-0,38%	-0,69%
	9	-0,66%	-0,49%	0,22%	0,38%	1,31%	0,47%	0,35%	0,33%	0,03%	-0,25%
	10	-0,72%	0,07%	0,72%	0,90%	2,02%	1,27%	0,99%	0,71%	0,43%	0,15%

Quadro 15: Diferenças relativas entre os preços teóricos das *swaptions* e os preços do modelo (21-06-2010)

		<i>Tenor</i>									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Expiry</i>	1	3,52%	5,87%	3,14%	1,55%	0,42%	-0,94%	-2,69%	-3,97%	-5,53%	-6,71%
	2	-11,34%	-0,34%	-1,68%	-2,72%	-2,97%	-4,48%	-6,25%	-7,39%	-8,70%	-9,81%
	3	-4,90%	0,17%	-1,56%	-2,12%	-2,95%	-4,74%	-6,05%	-7,27%	-8,37%	-9,65%
	4	-5,02%	-1,13%	-0,70%	-1,31%	-2,33%	-3,50%	-4,25%	-5,44%	-6,43%	-7,66%
	5	-1,38%	2,51%	1,52%	0,99%	0,16%	-0,78%	-2,30%	-3,09%	-4,18%	-5,12%
	6	7,85%	6,05%	4,98%	3,74%	2,82%	1,40%	-0,09%	-1,48%	-2,50%	-3,23%
	7	4,44%	5,47%	4,56%	3,44%	2,66%	1,63%	0,19%	-1,69%	-1,86%	-2,72%
	8	6,74%	6,70%	5,58%	3,74%	2,82%	1,70%	0,37%	-0,77%	-1,36%	-2,43%
	9	8,32%	8,09%	5,98%	4,53%	3,35%	1,97%	1,56%	0,32%	-0,74%	-2,04%
	10	11,41%	9,58%	7,84%	6,06%	4,28%	3,56%	3,04%	1,64%	0,10%	-1,51%

Quadro 16: Diferenças relativas entre os preços teóricos das opções sobre o índice Euro Stoxx 50 e os preços do modelo (11-06-2007)

Resultados relativos a 11-06-2007						
maturidade	21-Dec-07	19-Dec-08	18-Dec-09	17-Dec-10	16-Dec-11	21-Dec-12
T	0,53	1,52	2,52	3,52	4,51	5,53
3900	-2,08%	-0,46%	0,14%	0,16%	0,15%	0,12%
4000	-1,93%	-0,29%	0,26%	0,23%	0,16%	0,10%
4100	-1,99%	-0,24%	0,30%	0,22%	0,13%	0,04%
4200	-2,32%	-0,39%	0,21%	0,10%	0,01%	-0,08%
4300	-3,01%	-0,80%	-0,08%	-0,14%	-0,19%	-0,25%
4400	-4,38%	-1,53%	-0,56%	-0,51%	-0,51%	-0,52%
4500	6,71%	3,07%	2,24%	1,38%	0,81%	0,42%
4600	5,13%	1,83%	1,47%	0,79%	0,38%	0,04%
4700	1,10%	-0,13%	0,32%	-0,04%	-0,26%	-0,44%
4800	-7,37%	-3,06%	-1,33%	-1,13%	-1,07%	-1,04%
4900	4,45%	1,68%	1,58%	0,73%	0,23%	-0,14%

Quadro 17: Diferenças relativas entre os preços teóricos das opções sobre o índice Euro Stoxx 50 e os preços do modelo (21-06-2010)

maturidade	17-12-2010	17-06-2011	16-12-2011	15-06-2012	21-12-2012	20-12-2013	19-12-2014	18-12-2015
T	0,50	1,00	1,51	2,01	2,54	3,55	4,56	5,57
2450	-3,40%	-2,69%	-1,60%	-2,16%	-1,35%	-	-	-
2500	-5,14%	-3,69%	-2,57%	-2,62%	-1,68%	-1,90%	-2,40%	-
2550	-1,99%	-1,11%	-0,16%	-0,87%	-0,19%	-	-	-
2600	-3,92%	-2,25%	-1,16%	-1,66%	-0,81%	-0,65%	-1,57%	-
2650	0,11%	0,70%	0,88%	0,33%	0,80%	-	-	-
2700	-2,80%	-0,99%	0,06%	-0,55%	0,21%	0,37%	-0,67%	-0,70%
2750	1,84%	2,32%	2,57%	1,59%	1,89%	-	-	-
2800	-1,69%	0,09%	0,97%	0,36%	1,64%	1,29%	0,25%	0,27%
2850	3,92%	3,70%	3,61%	2,27%	3,49%	-	-	-
2900	-1,55%	0,74%	0,97%	1,28%	2,90%	2,38%	1,00%	1,08%
2950	4,26%	4,50%	3,98%	3,52%	4,05%	-	-	-

Anexo C – Simulação da evolução dos fundos de investimento

Gráfico 11: Investimento de 75% acções e 25% em obrigações (11-06-2007)

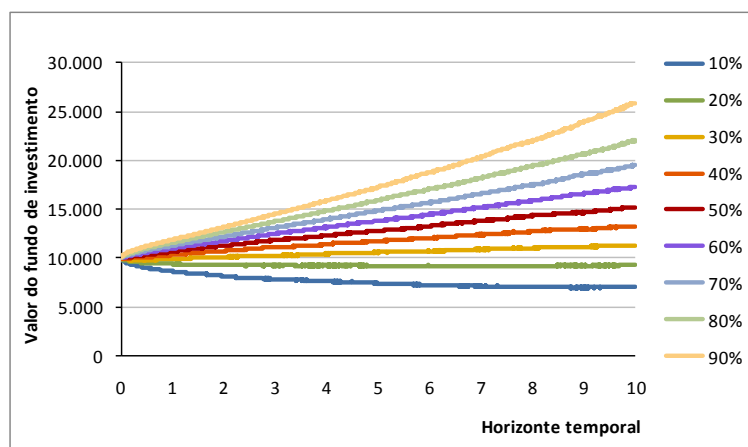


Gráfico 12: Investimento de 50% acções e 50% em obrigações (11-06-2007)

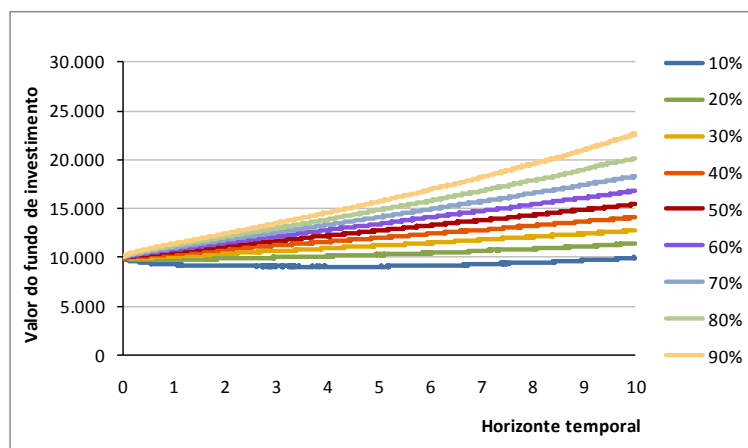


Gráfico 13: Investimento de 25% ações e 75% em obrigações (11-06-2007)

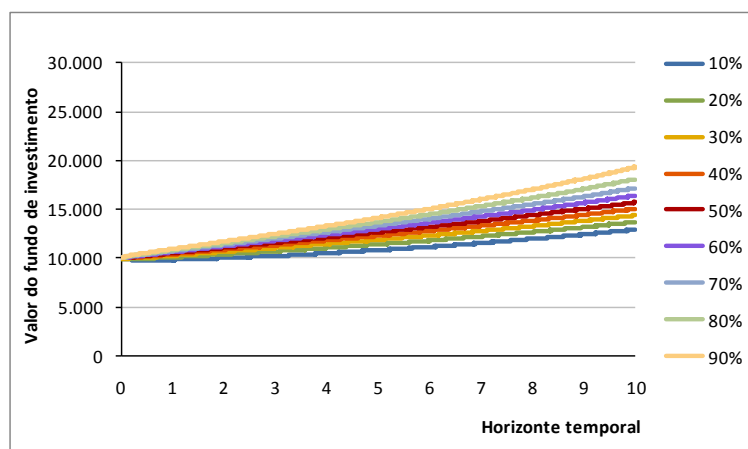


Gráfico 14: Investimento de 75% ações e 25% em obrigações (21-06-2010)

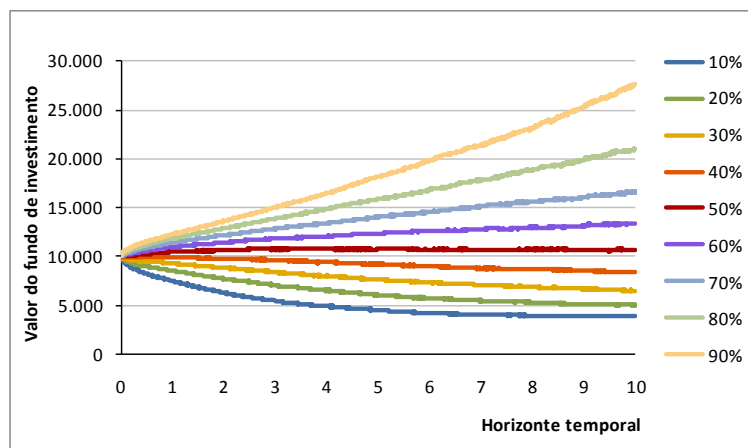


Gráfico 15: Investimento de 50% ações e 50% em obrigações (21-06-2010)

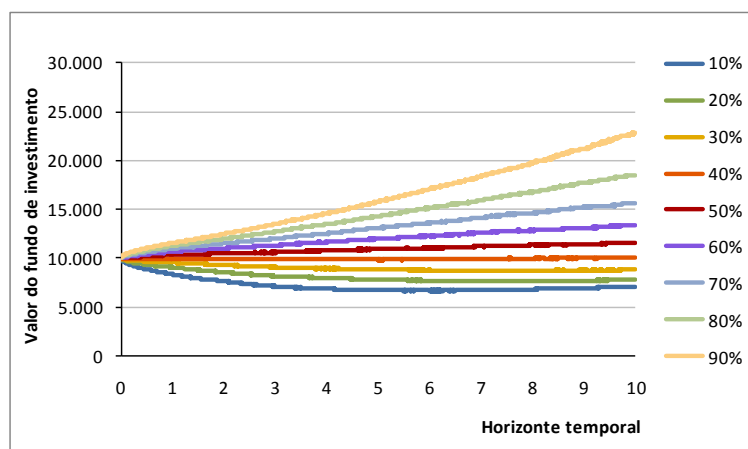
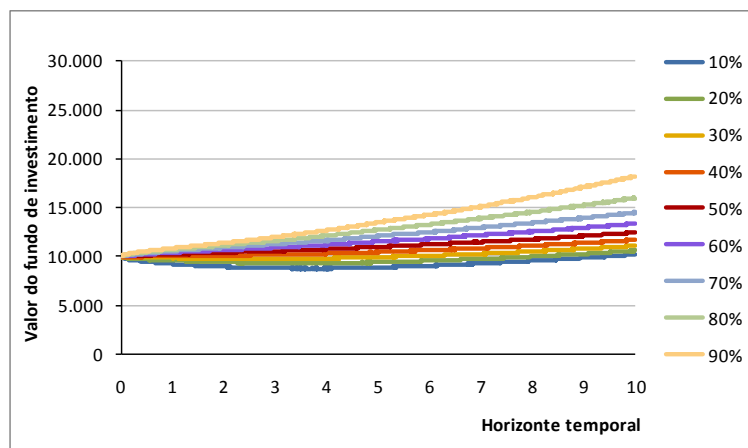


Gráfico 16: Investimento de 25% ações e 75% em obrigações (21-06-2010)



Anexo D – Simulação da evolução do índice obrigacionista

Gráfico 17: $\delta = 0,25$ e $D=1$ (11-06-2007)

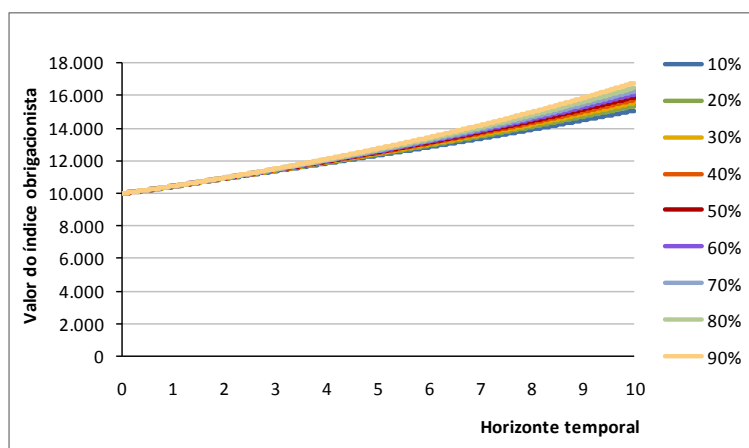


Gráfico 18: $\delta = 0,25$ e $D=5$ (11-06-2007)

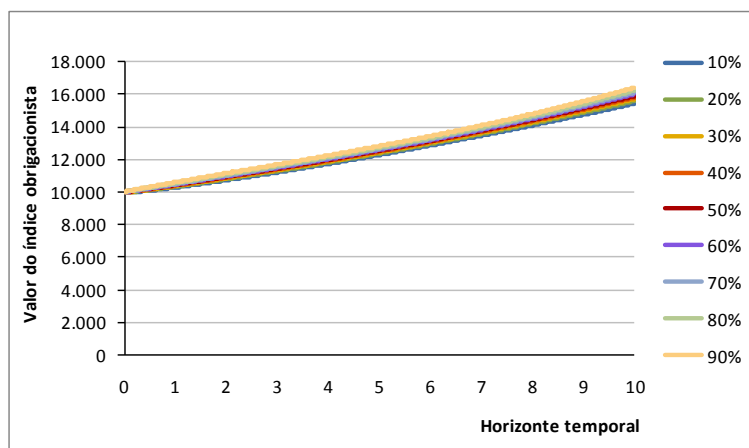


Gráfico 19: $\delta = 0,25$ e $D=10$ (11-06-2007)

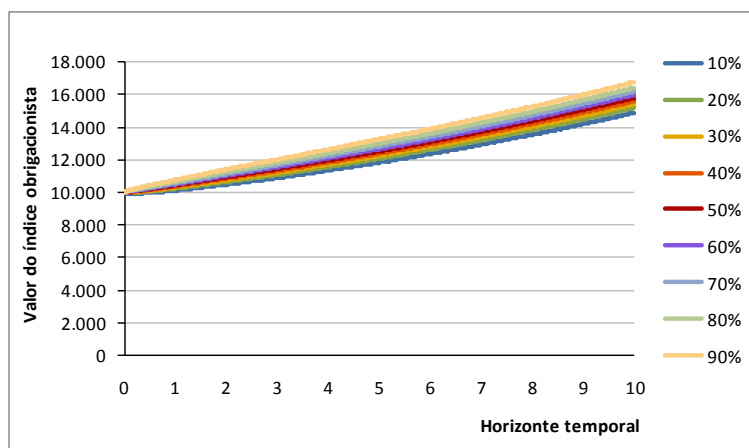


Gráfico 20: $\delta = 0,25$ e $D=1$ (21-06-2010)

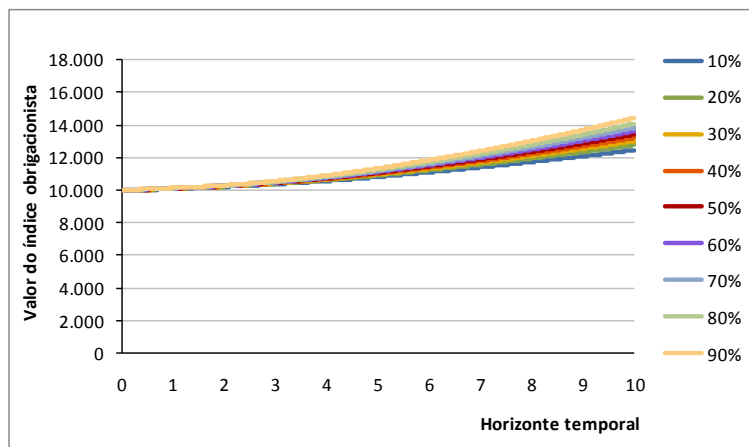


Gráfico 21: $\delta = 0,25$ e $D=5$ (21-06-2010)

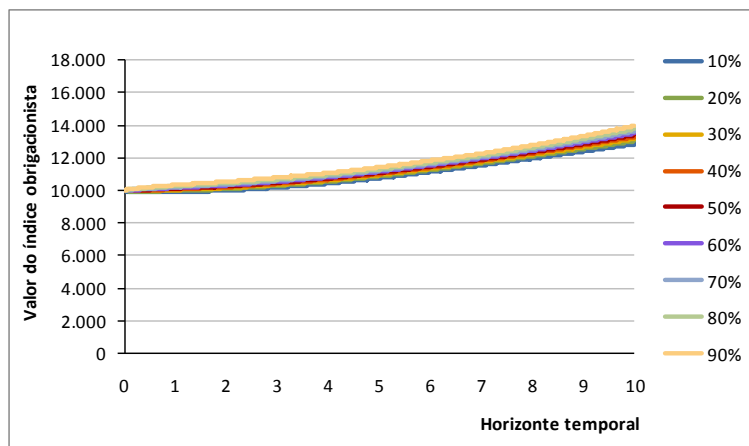
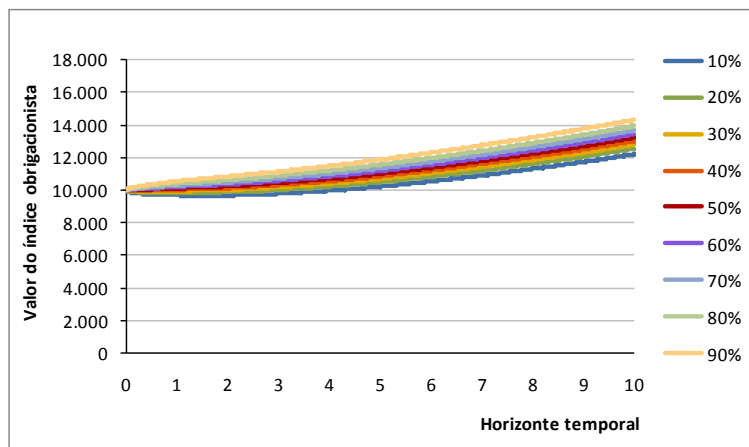


Gráfico 22: $\delta = 0,25$ e $D=10$ (21-06-2010)



Anexo E – Resultados das análises de sensibilidade

Quadro 18: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$,

$$g_A = 3\%, g_D = 0\%, g_S = 3\%, \alpha = 0\%, \beta = 1\%, \lambda = 1 \text{ e } x = 20$$

	11-06-2007			21-06-2010		
	Fundo A	Fundo B	Fundo C	Fundo A	Fundo B	Fundo C
GMAB^(a)	11.090,49	10.518,69	10.060,32	12.995,83	12.062,81	11.064,34
GMDB	52,68	51,10	50,50	57,55	54,36	51,52
Total s/ opção resgate	11.143,17	10.569,78	10.110,83	13.053,38	12.117,17	11.115,86
Total c/opção resgate	11.319,30	10.732,22	10.241,73	13.108,93	12.164,16	11.194,82
Valor opção de resgate	176,13	162,44	130,90	55,56	46,99	78,96

(a) Inclui valor da conta corrente

Quadro 19: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$,

$$g_A = 3\%, g_D = 0\%, g_S = 3\%, \alpha = 0\%, \beta = 1\%, \lambda = 1 \text{ e } x = 60$$

	11-06-2007			21-06-2010		
	Fundo A	Fundo B	Fundo C	Fundo A	Fundo B	Fundo C
GMAB^(a)	10.159,99	9.678,85	9.279,44	11.936,67	11.042,78	10.230,52
GMDB	860,48	837,71	828,82	945,44	887,46	846,07
Total s/ opção resgate	11.020,47	10.516,56	10.108,26	12.882,12	11.930,23	11.076,59
Total c/opção resgate	11.243,42	10.700,06	10.240,83	13.013,52	12.051,74	11.209,83
Valor opção de resgate	222,94	183,50	132,57	131,40	121,51	133,23

(a) Inclui valor da conta corrente

Quadro 20: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$,

$$g_A = 3\%, g_D = 0\%, g_S = 0\%, \alpha = 0\%, \beta = 1\%, \lambda = 1 \text{ e } x = 40$$

	11-06-2007			21-06-2010		
	Fundo A	Fundo B	Fundo C	Fundo A	Fundo B	Fundo C
GMAB^(a)	10.867,61	10.410,09	9.916,48	12.794,74	11.868,44	10.943,27
GMDB	190,41	185,96	183,06	208,62	197,11	186,81
Total s/ opção resgate	11.058,02	10.596,06	10.099,54	13.003,35	12.065,55	11.130,08
Total c/opção resgate	11.102,89	10.626,63	10.127,18	13.009,45	12.071,91	11.138,09
Valor opção de resgate	44,87	30,58	27,64	6,09	6,35	8,01

(a) Inclui valor da conta corrente

Quadro 21: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$,

$$g_A = 3\%, g_D = 0\%, g_S = 3\%, \alpha = 0\%, \beta = 2\%, \lambda = 1 \text{ e } x = 40$$

	11-06-2007			21-06-2010		
	Fundo A	Fundo B	Fundo C	Fundo A	Fundo B	Fundo C
GMAB^(a)	10.888,46	10.396,36	9.934,73	12.811,43	11.845,59	10.927,05
GMDB	190,37	185,68	183,43	208,55	196,92	186,56
Total s/ opção resgate	11.078,83	10.582,04	10.118,17	13.019,98	12.042,50	11.113,61
Total c/opção resgate	11.221,62	10.710,63	10.223,11	13.034,41	12.061,69	11.163,12
Valor opção de resgate	142,79	128,59	104,94	14,43	19,19	49,51

(a) Inclui valor da conta corrente

Quadro 22: Valores da melhor estimativa com $FI_0 = 10.000$, $T = 10$, $D = 5$, $\delta = 0,25$,

$$g_A = 3\%, g_D = 0\%, g_S = 3\%, \alpha = 0\%, \beta = 1\%, \lambda = 1,1 \text{ e } x = 40$$

	11-06-2007			21-06-2010		
	Fundo A	Fundo B	Fundo C	Fundo A	Fundo B	Fundo C
GMAB^(a)	10.911,50	10.358,98	9.930,91	12.758,42	11.860,16	10.938,17
GMDB	190,54	185,22	183,16	208,83	196,82	186,90
Total s/ opção resgate	11.102,03	10.544,20	10.114,08	12.967,25	12.056,98	11.125,07
Total c/opção resgate	11.136,74	10.566,92	10.126,11	12.969,12	12.059,36	11.136,37
Valor opção de resgate	34,71	22,72	12,03	1,87	2,39	11,30

(a) Inclui valor da conta corrente

Anexo F - Código dos programas

F.1. Algoritmo para determinação do preço de uma opção *call* Europeia segundo o modelo de Heston usando um método de integração numérica (baseado em Moodley (2005))

```
function value=HE_Call_Price(kappa,theta,v0,psi,rho_HE,s0,strike,T)

% Dados_R_0T=xlsread('Dados_R_0T.xls');
global Dados_R_0T;

r=Dados_R_0T(round(T*360),1);

call=s0*HestonP(kappa,theta,v0,psi,rho_HE,r,s0,strike,T,1)-...
strike*exp(-r*T)*HestonP(kappa,theta,v0,psi,rho_HE,r,s0,strike,T,2);

value=call;

end

function value=HestonP(kappa,theta,v0,psi,rho_HE,r,s0,strike,T,type)

% quad1: integração numérica pelo método 'adaptive Lobatto quadrature'
value=0.5+1/pi*quad1(@HestonPIntegrand,0,100,[],[],kappa,...
theta,v0,psi,rho_HE,r,s0,strike,T,type);

end

function value
=HestonPIntegrand(phi,kappa,theta,v0,psi,rho_HE,r,s0,strike,T,type)

value=real(exp(-1i*phi*log(strike)).*Hestf(phi,kappa,theta,v0,psi,...
rho_HE,r,s0,T,type))./(1i*phi));

end

function value=Hestf(phi,kappa,theta,v0,psi,rho_HE,r,s0,T,type)

if type==1
    u=0.5;
    b=kappa-rho_HE*psi;
else
    u=-0.5;
    b=kappa;
end

a=kappa*theta;
x=log(s0);
d=sqrt((rho_HE*psi*phi.*1i-b).^2-psi^2*(2*u*phi.*1i-phi.^2));
g=(b-rho_HE*psi*phi*1i+d)./(b-rho_HE*psi*phi*1i-d);
```

```
C=r*phi.*li*T+a/psi^2.*((b-rho_HE*psi*phi*li+d)*T-...
2*log((1-g.*exp(d*T))./(1-g)));
D=(b-rho_HE*psi*phi*li+d)./psi^2.*((1-exp(d*T))./(1-g.*exp(d*T)));
f=exp(C+D*v0+li*phi*x);

value=f;

end
```

F.2. Algoritmo para determinação do preço de uma opção *call* Europeia segundo o modelo Heston-G2++ usando a transformada rápida de Fourier (baseado em Moodley (2005))

```
function value=HEG2_Call_Price(kappa,theta,v0,psi,rho_HE,s0,strike,T)

global Dados_FD;
%Dados_FD=xlsread('Dados_FD.xls');

% Definição dos parâmetros do modelo G2++
a=0.0248247860797102000;
b=0.0248252381767660000;
sigma=0.0007013450551958080;
eta=0.0086594765772212000;
rho_G2=-0.8922758723405870000;

r=0;

x0 = log(s0);
alpha = 0.75;
N = 4096;
c = 512;
eta_Fft = c/N;
b_Fft = pi/eta_Fft;
u = [0:N-1]*eta_Fft;
lamda = 2*b_Fft/N;
position = (log(strike) + b_Fft)/lamda + 1;

% Para opções in-the-money e at-the-money
if strike<=s0

v = u - (alpha+1)*1i;
zeta = -.5*(v.^2 +1i*v);
gamma = kappa - rho_HE*psi*v*1i;
PHI = sqrt(gamma.^2 - 2*psi^2*zeta);

%r=0;
A = 1i*v*(x0 + r*T);
B = v0*((2*zeta.*(1-exp(-PHI.*T)))/(2*PHI - (PHI-gamma).*(1-exp(-PHI*T))));
C = -(kappa*theta)/(psi^2)*(2*log((2*PHI - (PHI-gamma).*(1-exp(-PHI*T)))/(2*PHI)) + (PHI-gamma)*T);

D = 1i*M_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,T)*v - ...
(V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,T)*v.^2)/2;

charFunc = exp(A + B + C + D);

% Substituiu-se exp(-r*T) por P_0T
ModifiedCharFunc = charFunc* Dados_FD(round(T*360),1)./( ...
(alpha^2 + alpha - u.^2 + 1i*(2*alpha +1)*u);

SimpsonW = 1/3*(3 + (-1).^[1:N] - [1, zeros(1,N-1)]);
FftFunc = exp(1i*b_Fft*u).*ModifiedCharFunc*eta_Fft.*SimpsonW;
payoff = real(fft(FftFunc));
CallValueM = exp(-log(strike)*alpha)*payoff/pi;
```

```

value = CallValueM(round(position));

% Para opções out-of-the-money
else

w1 = u-1i*alpha;
w2 = u+1i*alpha;
v1 = u-1i*alpha -1i;
v2 = u+1i*alpha -1i;

zeta1 = -.5*(v1.^2 +1i*v1);
gamma1 = kappa - rho_HE*psi*v1*1i;
PHI1 = sqrt(gamma1.^2 - 2*psi^2*zeta1);

% r=0;
A1 = 1i*v1*(x0 + r*T);
B1 = v0*((2*zeta1.*(1-exp(-PHI1.*T)))./(2*PHI1 - (PHI1-gamma1).* ...
(1-exp(-PHI1*T))));
C1 = -(kappa*theta)/(psi^2)*(2*log((2*PHI1 - (PHI1-gamma1).* ...
(1-exp(-PHI1*T)))./(2*PHI1)) + (PHI1-gamma1)*T);

D1 = 1i*M_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,T)*v1 - ...
(V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,T)*v1.^2)/2;

charFunc1 = exp(A1 + B1 + C1 + D1);

% Substituiu-se exp(-r*T) por P_0T
ModifiedCharFunc1 = Dados_FD(round(T*360),1)*(1./(1+1i*w1) - ...
Dados_FD(round(T*360),1)./(1i*w1) - charFunc1./(w1.^2 - 1i*w1));
zeta2 = -.5*(v2.^2 +1i*v2);
gamma2 = kappa - rho_HE*psi*v2*1i;
PHI2 = sqrt(gamma2.^2 - 2*psi^2*zeta2);

% r=0;
A2 = 1i*v2*(x0 + r*T);
B2 = v0*((2*zeta2.*(1-exp(-PHI2.*T)))./(2*PHI2 - (PHI2-gamma2).* ...
(1-exp(-PHI2*T))));
C2 = -(kappa*theta)/(psi^2)*(2*log((2*PHI2 - (PHI2-gamma2).* ...
(1-exp(-PHI2*T)))./(2*PHI2)) + (PHI2-gamma2)*T);

D2 = 1i*M_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,T)*v2 - ...
(V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,T)*v2.^2)/2;

charFunc2 = exp(A2 + B2 + C2 + D2);

% Substituiu-se exp(-r*T) por P_0T
ModifiedCharFunc2 = Dados_FD(round(T*360),1)*(1./(1+1i*w2) - ...
Dados_FD(round(T*360),1)./(1i*w2) - charFunc2./(w2.^2 - 1i*w2));

ModifiedCharFuncCombo = (ModifiedCharFunc1 - ModifiedCharFunc2)/2 ;

SimpsonW = 1/3*(3 + (-1).^[1:N] - [1, zeros(1,N-1)]);
FftFunc = exp(1i*b_Fft*u).*ModifiedCharFuncCombo*eta_Fft.*SimpsonW;
payoff = real(fft(FftFunc));
CallValueM = payoff/pi/sinh(alpha*log(strike));

value = CallValueM(round(position));

end

end

```

```
function value = M_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,t,T)

global Dados_FD;
%Dados_FD = xlsread('Dados_FD.xls');

value = -log(Dados_FD(round(T*360),1))+ ...
(1/2)*V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,t,T);

end

function value = V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,t,T)

value = ((sigma^2)/(a^2))*((T-t)+(2/a)*exp(-a*(T-t))-(1/(2*a))* ...
exp(-2*a*(T-t))-3/(2*a))+((eta^2)/(b^2))*((T-t)+(2/b)* ...
exp(-b*(T-t))-(1/(2*b))*exp(-2*b*(T-t))-(3/(2*b)))+ ...
(2*rho_G2*((sigma*eta)/(a*b))*((T-t)+((exp(-a*(T-t))-1)/a)+ ...
((exp(-b*(T-t))-1)/b)-((exp(-(a+b)*(T-t))-1)/(a+b))));

end
```

F.3. Algoritmo de otimização global para a calibragem do modelo Heston-G2++

```

clear;
global Dados;
global Dados_FD;
global N_Obs;
global P_Call;
global Error;

% Dados [T s0 strike price]
% Dados_FD <- P(0,T)
Dados=xlsread('Dados_HEG2.xls');
Dados_FD=xlsread('Dados_FD.xls');

% Número de observações
Dim=size(Dados);
N_Obs=Dim(1);

% Parâmetros iniciais [kappa theta v0 psi rho]
% lb limite inferior para os parâmetros
% ub limite superior para os parâmetros
x0=[0.05 0.05 0.05 0.05 0.05];
lb=[0 0 0 0 -1];
ub=[10 1 1 1 1];

% asamin é a função que permite aplicar a rotina ASA (Adaptive
% Simulated Annealing)
% A sua utilização tem de ser precedida pelo seguinte comando:
% mex asamin.c asa.c -DUSER_ACCEPTANCE_TEST#TRUE -DUSER_ASA_OUT#TRUE

asamin('set','test_in_cost_func',0);
% Ao fixar test_in_cost_func igual a 0, a função HEG2_Cost_Global
% devolve simplesmente o valor da função objectivo

[fstar,xstar,grad,hessian,state]=asamin('minimize',...
'HEG2_Cost_Global',x0',lb',ub',-1*ones(5,1));

% ones devolve uma matriz 5 por 1 de elementos unitários

% [fstar,xstar,grad,hessian,state] = asamin ('minimize',...
% func, xinit, xmin, xmax, xtype, parm1, parm2, ...)
% minimiza a função custo 'func' (HEG2_Cost_Global)

% xinit é igual a x0
% xmin é igual a lb
% xmax é igual a ub

% O vector xtype indica se os argumentos são reais (=-1)
% ou inteiros (=1)
% Todos os parâmetros a seguir a xtype são opcionais

% A função asamin devolve os seguintes valores:

% fstar, o valor da função objectivo em relação a xstar
% xstar, a solução final, potencialmente correspondente ao minimizante
% da função custo 'func'

```

```
% grad, gradiente da função custo 'func' em relação a xstar
% hessian, a matriz hessiana da função custo 'func' em relação a xstar
% state, vector que contém informação acerca do estado de finalização
% da rotina ASA: state(1) corresponde a um código que permite
% identificar o motivo de finalização da rotina (0 define a situação
% normal) e state(2) corresponde ao valor de uma
% variável flag que é igual a 0 se os parâmetros violam as condições
% definidas pelo utilizador e 1 caso contrário

% Cálculo do preço das calls com base nos parâmetros otimizados
for i=1:N_Obs

P_Call(i)=HEG2_Call_Price(xstar(1),xstar(2),xstar(3),xstar(4), ...
xstar(5),Dados(i,2),Dados(i,3),Dados(i,1));

Error(i)=(P_Call(i)-Dados(i,4));

end

xlswrite('HEG2_Otimizar_Global.xls',fstar,'Folha1','D4');
xlswrite('HEG2_Otimizar_Global.xls',xstar,'Folha1','F4');
xlswrite('HEG2_Otimizar_Global.xls',grad,'Folha1','H4');
xlswrite('HEG2_Otimizar_Global.xls',hessian,'Folha1','J4');
xlswrite('HEG2_Otimizar_Global.xls',state,'Folha1','P4');
xlswrite('HEG2_Otimizar_Global.xls',P_Call,'Folha1','D12');
xlswrite('HEG2_Otimizar_Global.xls',Error,'Folha1','D14');

function [cost, flag] = HEG2_Cost_Global(input)

% input [kappa theta v0 psi rho]
global Dados;
global N_Obs;
global Dif;

% Teste à condição  $2*\kappa*\theta-\psi^2>0$ 

if(2*input(1)*input(2)<=input(4)^2)
flag=0;
cost=0;

else

for i=1:N_Obs
Dif(i)=(HEG2_Call_Price(input(1),input(2),...
input(3),input(4),input(5),...
Dados(i,2),Dados(i,3),Dados(i,1))-Dados(i,4));
end

cost=sum(Dif.^2);
flag=1;

end

end
```

F.4. Algoritmo para simulação da evolução dos fundos de investimento

```

function [mat1, mat2]=FI(P,T,ano,prop_equity,D,delta)

% Inicialização
N_Simul=10000;
Steps=360;
dt=1/Steps;
N_Steps=T*Steps;

% Parâmetros do modelo HEG2
if ano==2007

a=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','C4');
b=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','C5');
sigma=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','C6');
eta=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','C7');
rho_G2=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','C8');

kappa=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','G4');
theta=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','G5');
v0=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','G6');
psi=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','G7');
rho_HE=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','G8');

else

a=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','D4');
b=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','D5');
sigma=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','D6');
eta=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','D7');
rho_G2=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','D8');

kappa=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','H4');
theta=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','H5');
v0=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','H6');
psi=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','H7');
rho_HE=xlsread('Dados_Parametros.xls','Folha1','H8');

end

Dados_FD=xlsread('Dados_FD.xls');

%Inicialização de vectores e matrizes para simulação do valor do fundo

xt=zeros(1,N_Steps+1);
yt=zeros(1,N_Steps+1);
Rt_mat=zeros(N_Simul,N_Steps);

vt=zeros(1,N_Steps+1);
Log_St=zeros(1,N_Steps+1);
St=zeros(N_Simul,N_Steps+1);

Pt_v=zeros(N_Simul,T*delta+1);
Pt=zeros(N_Simul,N_Steps+1);
Bt=zeros(N_Simul,N_Steps+1);

FIt=zeros(N_Simul,N_Steps+1);
FI0=P;

```



```

Fit(:,1)=FI0;

S0=FI0*prop_equity;
B0=FI0*(1-prop_equity);

Z1=randn(N_Simul,N_Steps);
Z2=randn(N_Simul,N_Steps);
Z3=randn(N_Simul,N_Steps);
Z4=randn(N_Simul,N_Steps);

sum_v=zeros(N_Simul,1);

perct_St=zeros(9,N_Steps+1);
perct_Bt=zeros(9,N_Steps+1);
perct_FIt=zeros(9,N_Steps+1);

% Simulação do valor do fundo

phi_c=1.5;
gamma1=1;
gamma2=0;

sigma_xt=sigma*((1/(2*a))*(1-exp(-2*a*dt)))^0.5;
sigma_yt=eta*((1/(2*b))*(1-exp(-2*b*dt)))^0.5;

Cov_rR=((sigma^2)/(2*(a^2)))*(1+exp(-2*a*dt)-2*exp(-a*dt))+...
((eta^2)/(2*(b^2)))*(1+exp(-2*b*dt)-2*exp(-b*dt))+...
(rho_G2*((sigma*eta)/(a*b)))*(1-exp(-a*dt)-exp(-b*dt)+exp(-(a+b)*dt));

sigma_r=(sigma_xt^2+sigma_yt^2+2*rho_G2*sigma_xt*sigma_yt)^0.5;

rho_rR=Cov_rR/(sigma_r*(V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,dt)^0.5));

K1=gamma1*dt*((kappa*rho_HE)/psi)-(1/2))-(rho_HE/psi);
K2=gamma2*dt*((kappa*rho_HE)/psi)-(1/2))+ (rho_HE/psi);
K3=gamma1*dt*(1-rho_HE^2);
K4=gamma2*dt*(1-rho_HE^2);
A=K2+(1/2)*K4;

for i=1:N_Simul

xt(1)=0;
yt(1)=0;
vt(1)=v0;
Log_St(1)=log(S0);
St(i,1)=S0;

for t=2:N_Steps+1

Mxt=((sigma^2)/(a^2)+rho_G2*((sigma*eta)/(a*b)))* ...
(1-exp(-a*((t-1)*dt-(t-2)*dt)))-((sigma^2)/(2*(a^2)))* ...
(exp(-a*(T-(t-1)*dt))-exp(-a*(T+(t-1)*dt-2*(t-2)*dt)))-...
((rho_G2*sigma*eta)/(b*(a+b)))*(exp(-b*(T-(t-1)*dt))-...
exp(-b*T-a*(t-1)*dt+(a+b)*(t-2)*dt));

Myt=((eta^2)/(b^2)+rho_G2*((sigma*eta)/(a*b)))* ...
(1-exp(-b*((t-1)*dt-(t-2)*dt)))-...
((eta^2)/(2*(b^2)))*(exp(-b*(T-(t-1)*dt))-exp(-b*(T+(t-1)*dt-...
2*(t-2)*dt)))-((rho_G2*sigma*eta)/(a*(a+b)))*(exp(-a*(T-(t-1)*dt))-...
exp(-a*T-b*(t-1)*dt+(a+b)*(t-2)*dt));

```

```

xt(t)=xt(t-1)*exp(-a*dt)-Mxt+sigma*((1/(2*a))*...
(1-exp(-2*a*dt))^0.5)*Z1(i,t-1);
yt(t)=yt(t-1)*exp(-b*dt)-Myt+eta*((1/(2*b))*...
(1-exp(-2*b*dt))^0.5)*...
(rho_G2*Z1(i,t-1)+((1-rho_G2^2)^0.5)*Z2(i,t-1));

MR=((1-exp(-a*dt))/a)*xt(t)+((1-exp(-b*dt))/b)*yt(t)-...
log(Dados_FD(t,1)/Dados_FD(t-1,1))+...
(1/2)*(V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,(t-1)*dt)-...
V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,(t-2)*dt));

a1=sigma_xt+rho_G2*sigma_yt*Z1(i,t-1);
a2=sigma_yt*((1-rho_G2^2)^0.5)*Z2(i,t-1);
a3=(a1+a2)/sigma_r;
a4=a3*rho_rR;
a5=a4+((1-rho_rR^2)^0.5)*Z3(i,t-1);
Rt=a5*(V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,dt)^0.5)+MR;

Rt_mat(i,t-1)=Rt;

m=theta+(vt(t-1)-theta)*exp(-kappa*dt);
s2=((vt(t-1)*psi^2*exp(-kappa*dt))/kappa)*(1-exp(-kappa*dt))+...
((theta*(psi^2))/(2*kappa))*(1-exp(-kappa*dt))^2;

phi=s2/m^2;

if phi<=phi_c

b2=2*(phi^-1)-1+(2*phi^-1)^0.5*(2*phi^-1-1)^0.5;
aa=(m/(1+b2));
Zv=randn();
vt(t)=aa*(b2^0.5+Zv)^2;

K0_ast=-((A*b2*aa)/(1-2*A*aa))+(1/2)*log(1-2*A*aa)-...
(K1+(1/2)*K3)*vt(t-1);

else

p=(phi-1)/(phi+1);
beta=(1-p)/m;
Uv=rand();
if Uv<=p
vt(t)=0;
else
vt(t)=(beta^-1)*log((1-p)/(1-Uv));
end

K0_ast=-log((beta*(1-p))/(beta-A))-(K1+(1/2)*K3)*vt(t-1);
end

Log_St(t)=Log_St(t-1)+Rt+K0_ast+K1*vt(t-1)+K2*vt(t)+...
((K3*vt(t-1)+K4*vt(t))^0.5)*Z4(i,t-1);

St(i,t)=exp(Log_St(t));
end

Pt_v(i,1)=B0/Dados_FD(D*360,1);
Pt(i,1)=Dados_FD(D*360,1);
Bt(i,1)=Pt_v(i,1)*Pt(i,1);

for j=1:T*delta

```

```

for t=(j-1)*(360/delta)+1:j*(360/delta)
Pt(i,t+1)=((Dados_FD(round((D+(j-1)/delta)*360),1)/ ...
Dados_FD(t,1))*exp((1/2)* ...
(V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,t*dt,D+(j-1)/delta)-...
V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,D+(j-1)/delta)+...
V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,t*dt)-...
((1-exp(-a*(D+(j-1)/delta-t*dt)))/a)*xt(t+1)-...
((1-exp(-b*(D+(j-1)/delta-t*dt)))/b)*yt(t+1))));

end

for t=(j-1)*(360/delta)+1:j*(360/delta)
Bt(i,t+1)=Pt_v(i,j)*Pt(i,t+1);
end

Pt_v(i,j+1)=Bt(i,j*(360/delta)+1)/ ...
((Dados_FD(round((D+(j/delta))*360),1)/Dados_FD(j*(360/delta),1))* ...
exp((1/2)*V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,j*(360/delta)*dt,D+(j/delta))- ...
V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,D+(j/delta))+ ...
V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,0,j*(360/delta)*dt)- ...
((1-exp(-a*(D+(j/delta)-j*(360/delta)*dt)))/a)*xt(j*(360/delta)+1)-...
((1-exp(-b*(D+(j/delta)-j*(360/delta)*dt)))/b)*yt(j*(360/delta)+1))));

end

for t=2:N_Steps+1

if prop_equity==0
FIt(i,t)=Bt(i,t);
else
if prop_equity==1
FIt(i,t)=St(i,t);
else
FIt(i,t)=St(i,t)+Bt(i,t);
end
end

end

% Impressão dos resultados relativos à simulação do valor do fundo
% sum1=0;
% for t=1:N_Steps
% sum1=sum1+Rt_mat(i,t);
% end

% sum_v(i)=St(i,N_Steps+1)*exp(-sum1);

end

% sum2=0;
% for i=1:N_Simul
% sum2=sum2+sum_v(i);
% end

% for t=1:N_Steps+1

% perct_St(:,t)=prctile(St(:,t),[10 20 30 40 50 60 70 80 90]);
% perct_Bt(:,t)=prctile(Bt(:,t),[10 20 30 40 50 60 70 80 90]);
% perct_FIt(:,t)=prctile(FIt(:,t),[10 20 30 40 50 60 70 80 90]);
% end

```

```
% xlswrite('Simul_FI.xls',sum2/N_Simul,'Folha1','C5')
% xlswrite('Simul_FI.xls',perct_St,'Folha1','E5')
% xlswrite('Simul_FI.xls',perct_Bt,'Folha1','P5')
% xlswrite('Simul_FI.xls',perct_FIt,'Folha1','AA5')

% mat1=0;
% mat2=0;

mat1=Rt_mat;
mat2=FIt;

end

function value=V_tT(a,b,sigma,eta,rho_G2,t,T)

value=((sigma^2)/(a^2))*((T-t)+(2/a)*exp(-a*(T-t))-(1/(2*a))* ...
exp(-2*a*(T-t))-3/(2*a))+((eta^2)/(b^2))* ...
((T-t)+(2/b)*exp(-b*(T-t))-(1/(2*b))*exp(-2*b*(T-t))-(3/(2*b)))+ ...
(2*rho_G2*((sigma*eta)/(a*b))*((T-t)+((exp(-a*(T-t))-1)/a)+ ...
((exp(-b*(T-t))-1)/b)-((exp(-(a+b)*(T-t))-1)/(a+b))));

end
```

F.5. Algoritmo para avaliação de contratos com opções e garantias

```

function value=Av_Contrato(P,T,ga,gd,gs,alpha,beta,lambda,x)

% Inicialização
N_Simul=10000;
Steps=1;
N_Steps=T*Steps;

% Simulação do valor da conta corrente

[Rt_mat,FIt]=FI(P,T,2010,0.25,5,4);

CCt_aux=zeros(N_Simul,T*360+1);
CCt=zeros(N_Simul,T+1);

CCt_aux(:,1)=FIt(:,1);
for t=2:T*360+1
for i=1:N_Simul
CCt_aux(i,t)=CCt_aux(i,t-1)*(FIt(i,t)/FIt(i,t-1))*exp(-alpha*(1/360));
end
end

CCt(:,1)=CCt_aux(:,1);
for t=2:T+1
for i=1:N_Simul
CCt(i,t)=CCt_aux(i,(t-1)*360+1);
end
end

% Cálculo das taxas a utilizar no desconto

Rt_mat_dt=zeros(N_Simul,N_Steps);

for i=1:N_Simul
for j=1:N_Steps
sum=0;
for k=360*(j-1)+1:360*j
sum=sum+Rt_mat(i,k);
end
Rt_mat_dt(i,j)=sum;
end
end

% Inicialização de vectores e matrizes
VT=zeros(N_Simul,1);
V0=zeros(N_Simul,1);
Dt=zeros(N_Simul,N_Steps);
Dt_sum=zeros(N_Simul,1);
V_sum=zeros(N_Simul,1);

VRt=zeros(N_Simul,N_Steps-1);

t_ast=zeros(N_Simul,1);
Vi=zeros(N_Simul,N_Steps);
CEi=zeros(N_Simul,N_Steps-1);

Ti=zeros(N_Simul,1);

```

```

%Tábua de mortalidade
sx=xlsread('T_Mort.xls');

% Cálculo do valor do contrato sem opção de resgate

for i=1:N_Simul

VT(i,1)=max(P*(1+ga)^T,CCt(i,T+1));
V0(i,1)=exp(-sum_Rt(Rt_mat_dt,i,N_Steps))*(sx(x+T)/sx(x))*VT(i,1);

for t=1:N_Steps
Dt(i,t)=max(P*(1+gd)^t,CCt(i,t+1));
end

Dt_sum(i,1)=0;
for t=1:N_Steps
Dt_sum(i,1)=Dt_sum(i,1)+exp(-sum_Rt(Rt_mat_dt,i,t))*...
(sx(x+t-1)/sx(x))*(1-(sx(x+t)/sx(x+t-1)))*Dt(i,t);
end

V_sum(i,1)=V0(i,1)+Dt_sum(i,1);

end

sum1=0;
sum2=0;
sum3=0;
for i=1:N_Simul
sum1=sum1+V0(i,1);
sum2=sum2+Dt_sum(i,1);
sum3=sum3+V_sum(i,1);
end

% Opção de resgate

for t=1:N_Steps-1
VRt(:,t)=(1-beta)*max(CCt(:,t+1),P*(1+gs)^t);
end

for i=1:N_Simul
t_ast(i)=N_Steps;
Vi(i,N_Steps)=VT(i,1);
end

for t=N_Steps-1:-1:1

Y_v=Vi(:,t+1).*exp(-Rt_mat_dt(:,t+1));

X0_v=ones(size(CCt(:,t+1),1),1);
X1_v=1-CCt(:,t+1);
X2_v=(1/(1+1))*((2*1+1-CCt(:,t+1)).*X1_v-1*X0_v);
X3_v=(1/(2+1))*((2*2+1-CCt(:,t+1)).*X2_v-2*X1_v);
X4_v=(1/(3+1))*((2*3+1-CCt(:,t+1)).*X3_v-3*X2_v);
X5_v=(1/(4+1))*((2*4+1-CCt(:,t+1)).*X4_v-4*X3_v);
X6_v=(1/(5+1))*((2*5+1-CCt(:,t+1)).*X5_v-5*X4_v);
X7_v=(1/(6+1))*((2*6+1-CCt(:,t+1)).*X6_v-6*X5_v);
X8_v=(1/(7+1))*((2*7+1-CCt(:,t+1)).*X7_v-7*X6_v);

regress_mat=[X0_v X1_v X2_v X3_v X4_v X5_v X6_v X7_v X8_v];
p_v=regress_mat\Y_v;

```

```

CEi(:,t)=p_v(1)+p_v(2)*X1_v+p_v(3)*X2_v+p_v(4)*X3_v+...
p_v(5)*X4_v+p_v(6)*X5_v+p_v(7)*X6_v+p_v(8)*X7_v+p_v(9)*X8_v;

for i=1:N_Simul

if VRt(i,t)>lambda*((1-sx(x+t+1)/sx(x+t))*exp(-Rt_mat_dt(i,t+1)))*...
Dt(i,t+1)+(sx(x+t+1)/sx(x+t))*CEi(i,t)
t_ast(i)=t;
Vi(i,t)=VRt(i,t);
else
Vi(i,t)=exp(-Rt_mat_dt(i,t+1))*((1-sx(x+t+1)/sx(x+t))*...
Dt(i,t+1)+(sx(x+t+1)/sx(x+t))*Vi(i,t+1));
end
end

end

for i=1:N_Simul

if t_ast(i)==N_Steps
Ti(i)=(sx(x+t_ast(i))/sx(x))*exp(-sum_Rt(Rt_mat_dt,i,t_ast(i)))*...
max(P*(1+ga)^t_ast(i),CCt(i,t_ast(i)+1));
else
Ti(i)=(sx(x+t_ast(i))/sx(x))*exp(-sum_Rt(Rt_mat_dt,i,t_ast(i)))*...
VRt(i,t_ast(i));
end

for t=1:t_ast(i)
Ti(i)=Ti(i)+((sx(x+t-1)/sx(x))*(1-sx(x+t)/sx(x+t-1)))*...
exp(-sum_Rt(Rt_mat_dt,i,t))*Dt(i,t);
end
end

sum4=0;
for i=1:N_Simul
sum4=sum4+Ti(i);
end

xlswrite('Av_Contrato.xls',sum1/N_Simul,'Folha1','C4')
xlswrite('Av_Contrato.xls',sum2/N_Simul,'Folha1','C5')
xlswrite('Av_Contrato.xls',sum3/N_Simul,'Folha1','C6')
xlswrite('Av_Contrato.xls',sum4/N_Simul,'Folha1','C7')

xlswrite('Av_Contrato.xls',t_ast,'Folha1','E5')

value=0;

end

function value=sum_Rt(mat,i_simul,t_max)

sum=0;
for t=1:t_max
sum=sum+mat(i_simul,t);
end

value=sum;

end

```